



DEVOIR MAISON N° 1

Terminale Spécialité

Travail personnel — à rendre rédigé sur copie

CALCULATRICE autorisée

À RENDRE LE vendredi 6 novembre

BARÈME 15 pts

Consignes. Devoir à rendre sur copie double. Le soin, la rigueur des justifications et l'orthographe sont évalués. Tout plagiat entraîne la note N.N..

NOTE

/ 15

NOM, PRÉNOM

CLASSE _____

DATE _____

Exercice 1 • Suites numériques (5 pts)

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. (a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 . On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

0,5 pt

- (b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

0,5 pt

2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n \leq n + 3$.

0,5 pt

- (b) Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.

0,5 pt

- (c) En déduire une validation de la conjecture précédente.

0,5 pt

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

- (a) Démontrer que la suite (v_n) est bien une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

0,5 pt

- (b) En déduire que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 2 \left(\frac{2}{3} \right)^n + n.$$

0,5 pt

- (c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

0,5 pt

4. Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n \text{ et } T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$



(a) Exprimer S_n en fonction de n .

0,5 pt

(b) Déterminer la limite de la suite (T_n) .

0,5 pt

Exercice 2 • Géométrie dans l'espace (5 pts)

1. Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(1; -1; -1)$, $B(5; 0; -3)$, $C(2; -2; -2)$ et $D(0; 5; -2)$.

(a) Montrer que les points A , B et C définissent un plan.

1 pt

(b) Le point D appartient-il à ce plan ?

1 pt

2. Soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 3 + t \\ z = 1 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Donner un vecteur directeur de la droite Δ et un point de Δ .

0,5 pt

(b) Le point $M(-3; 4; 1)$ appartient-il à la droite Δ ?

0,5 pt

(c) Donner les coordonnées de trois points de la droite Δ .

1 pt

(d) Déterminer une autre représentation paramétrique de Δ .

1 pt

Exercice 3 • Probabilité conditionnelle et suite géométrique (5 pts)

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- ▶ Un salarié malade est absent.
- ▶ La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- ▶ Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,04.
- ▶ Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,24.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n -ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n .

On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leq p_n < 1$.

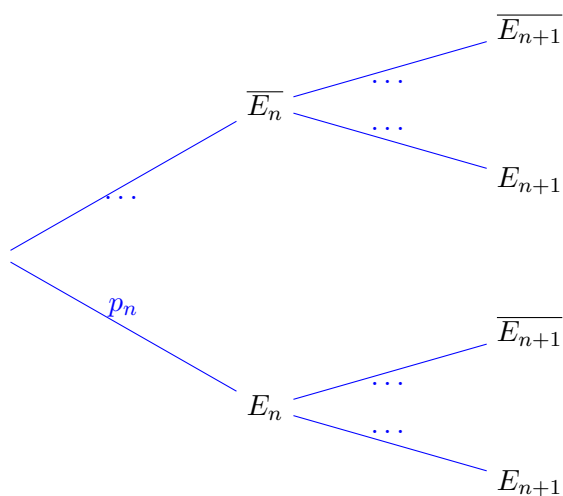
1. (a) Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

1 pt

(b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

1 pt

2. (a) Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-après :



- (b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.

1 pt

- (c) Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r .

1 pt

En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r .

- (d) En déduire la limite de la suite (p_n) .

1 pt