

Exercice 1 :

- 1 (a) $\frac{17!}{15!} = \frac{17 \times 16 \times 15!}{15!} = 17 \times 16 = 272.$
- (b) $\frac{6! - 5!}{5!} = \frac{6 \times 5! - 5!}{5!} = \frac{5 \times 5!}{5!} = 5.$
- (c) $\frac{7! \times 5!}{10!} = \frac{7! \times 5!}{10 \times 9 \times 8 \times 7!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{6}.$
- (d) $\frac{9!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3 \times 2} = 84.$
- 2 (a) $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2!} = 15.$
- (b) $\binom{15}{4} = \frac{15!}{4!(15-4)!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11!}{4!11!} = 1365.$
- (c) $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3!4!} = 35.$

Exercice 2 :

On lance cinq fois de suite de façon indépendante une pièce de monnaie et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de « face » obtenu.

- 1 Cela revient à répéter 5 fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli. De plus, La probabilité d'un succès, soit obtenir « face » est égale à $p = 0,5$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,5$.
- 2 $p(X = 3) = \binom{5}{3} \times 0,5^3 \times 0,5^2 = 0,3125.$
- 3 $p(X = 0) = (0,5)^5 = 0,03125.$
- 4 $1 - p(X = 0) = 1 - 0,03125 = 0,96875.$

Exercice 3 :

On lance six fois de suite un dé et on s'intéresse uniquement au fait d'obtenir « 5 ou 6 » ou « ni 5, ni 6 ». On note X la variable aléatoire donnant le nombre de fois où on obtient « 5 ou 6 ».

- 1 Cela revient à répéter 6 fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli « 5 ou 6 » ($p = 1/3$); « ni 5, ni 6 » ($1 - p = 2/3$). Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 1/3$.
- 2 $p(X = 2) = \binom{6}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 \approx 0,329.$

Exercice 4 :

On considère la variable aléatoire X qui suit la loi $\mathcal{B}(20; 0,36)$.

- ◇ $p(X > 6) = 1 - p(\overline{X > 6}) = 1 - p(X \leq 6) = 1 - 0,3803147 \approx 0,62.$
- ◇ $p(3 \leq X < 12) = p(2 < X \leq 13) = p(X \leq 13) - p(X \leq 2) = 0,9979222 - 0,0009619249 \approx 0,99.$

Exercice 5 :

On considère la variable aléatoire Y qui suit la loi $\mathcal{B}(30; 0,85)$.

- ◇ $p(X < 24) = p(X \leq 25) \approx 0,47$.
- ◇ $p(12 \leq X < 21) = p(11 < X \leq 22) = p(X \leq 22) - p(X \leq 11) \approx 0,07$.

Exercice 6 :

Une urne contient des jetons noirs et des jetons blancs. Le nombre de jetons noirs est le triple du nombre de jetons blancs.

- 1 On tire au hasard un jeton. La probabilité que ce jeton soit noir est égale à $\frac{3}{4}$.
- 2 On tire à présent 4 jetons successivement avec remise et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de jetons noirs obtenu.
 - (a) Cela revient à répéter 4 fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli. La probabilité d'un succès, soit obtenir un jeton « noir » est égale à $p = 3/4$, ainsi la probabilité d'obtenir un jeton « blanc » vaut $1 - p = 1/4$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 3/4$.
 - (b) $p(X = 2) = \binom{4}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \approx 0,2109$.
 - (c) $p(X = 2) + p(X = 3) \approx 0,2109 + \binom{4}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \approx 0,6328$.
 - (d) $E(X) = n \times p = 4 \times \frac{3}{4} = 3$. Cela représente le nombre moyen de jetons noirs que l'on peut espérer si on répète le tirage de 4 jetons un grand nombre de fois.

Exercice 7 :

Dans une fabrication d'objets en série, 8 % de ces objets présentent un défaut. Un carton contient 10 objets. La présence d'un défaut pour un objet est indépendante de l'objet choisi.

- 1 Si on note X le nombre d'objets sans défaut, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,92$. Probabilité que les dix objets soient sans défaut $= p(X = 10) = 0,92^{10} \approx 0,4344$.
- 2 Probabilité qu'au moins 8 objets soient sans défaut $= p(X = 8) + p(X = 9) + p(X = 10) = \binom{10}{8} \times 0,92^8 \times 0,08^2 + \binom{10}{9} \times 0,92^9 \times 0,08^1 + 0,92^{10} \approx 0,9599$.

Exercice 8 :

Un vendeur est chargé de démarcher des clients au téléphone. Il téléphone à 10 personnes par jour. On admet que la probabilité qu'une personne passe commande est de $\frac{1}{15}$ et que les décisions des personnes contactées sont indépendantes. X est le nombre de personnes qui passent commande en une journée.

- 1 X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{15}$.
$$p(X = k) = \binom{10}{k} \times \left(\frac{1}{15}\right)^k \times \left(\frac{14}{15}\right)^{10-k}.$$
 - 2 $E(X) = n \times p = 10 \times \frac{1}{15} \approx 0,667$.
 - 3 Gain moyen $\approx 100 \times 0,667 \approx 66,7$.
-

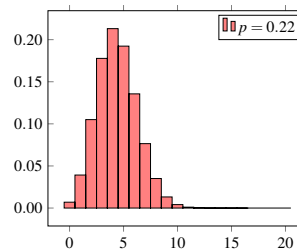
Exercice 9 :

On donne le diagramme en barres associé à la loi $\mathcal{B}(20; 0,22)$ et X suivant cette loi. 3,432.

- 1 Le diagramme est en forme de cloche et approximativement centré sur 4,5 l'espérance de cette loi.

En effet, $E(X) = np = 20 \times 0,22 = 4,4$.

- 2 $V(X) = np(1 - p) = 20 \times 0,22 \times 0,78 =$

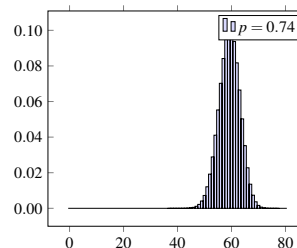


Exercice 10 :

On donne le diagramme en barres associé à une loi $\mathcal{B}(n; 0,74)$ et X suivant cette loi.

- 1 Le diagramme est en forme de cloche et approximativement centré sur 59, l'espérance de cette loi.

- 2 On sait que $E(X) = np$.
Ainsi, $59 \approx n \times 0,74$, soit $n = 80$.



Exercice 11 :

Une troupe de théâtre joue pour la première fois et on considère que le nombre de spectateurs présents ce jour-là est donné par une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,15$. Pour des questions logistiques, la troupe ne jouera pas s'il y a moins de dix personnes.

La troupe pourra jouer si $X \geq 10$. En utilisant la calculatrice, on obtient :

$$p(X \geq 10) = 1 - p(X < 10) = 1 - p(X \leq 9) \approx 0,945.$$

$p(X \geq 10) < 0,95$ ainsi, la troupe n'est pas « sûre » de pouvoir jouer au seuil de 95 %.

Exercice 12 :

Un restaurateur considère que son nombre quotidien de clients est donné par une variable aléatoire Y suivant la loi $\mathcal{B}(50; 0,75)$.

Le restaurateur pourra accueillir tous les clients si $Y \leq 43$. En utilisant la calculatrice on obtient :

$$p(Y \leq 43) \approx 0,98.$$

$p(Y \leq 43) > 0,95$, ainsi le restaurateur est sûr d'accueillir tous ses clients au seuil de 95 %.

Exercice 13 :

On considère que le nombre d'élèves dans la classe de Maria l'année prochaine est donné par une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{B}(36; 0,92)$.

Maria aura au moins 29 élèves dans sa classe l'année prochaine si $X \geq 29$. En utilisant la calculatrice, on obtient :

$$p(X \geq 29) = 1 - p(X < 29) = 1 - p(X \leq 28) \approx 0,993.$$

$p(X \geq 29) > 0,99$, ainsi Maria est sûre au seuil de 99 % d'avoir au moins 29 élèves dans sa classe l'année prochaine.

Exercice 14 :**3**

On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0,36$.

- 1** Ici, $1 - \alpha = 0,99$ donc $\alpha = 0,01$ et $\frac{\alpha}{2} = 0,005$. En utilisant la calculatrice, on obtient :
- $p(X < 16) = p(X \leq 15) \approx 0,0006 \leq 0,005$.
 - $p(X > 39) = 1 - p(X \leq 39) \approx 0,007 > 0,005$. Ainsi, $[16; 39]$ n'est pas un intervalle de fluctuation centré au seuil de 99 %.
- 2** Ici, $1 - \alpha = 0,99$ donc $\alpha = 0,01$ et $\frac{\alpha}{2} = 0,005$. En utilisant la calculatrice, on obtient :
- $p(X < 18) = p(X \leq 17) \approx 0,003 \leq 0,005$.
 - $p(X > 40) = 1 - p(X \leq 40) \approx 0,004 \leq 0,005$.
- Ainsi, $[18; 40]$ est un intervalle de fluctuation centré au risque 1%.
-