

Exercice n°1

Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2.$$

Développons $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 \\ &= \cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x \\ &\quad - 2\cos x \sin x + \sin^2 x \\ &= 2(\cos^2 x + \sin^2 x) \\ &= 2 \times 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Exercice n°2

On définit la fonction f par :

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}.$$

1. $f(x)$ est défini quand $1 + \sin x \neq 0$.

$$\text{Or, } 1 + \sin x = 0 \iff \sin x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, le domaine de définition de f est

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2. On sait que $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. Par conséquent, $f(x + 2\pi) = f(x)$.

Ainsi, f est 2π -périodique.

3. f est de la forme $\frac{u}{v}$, avec $u(x) = \cos x$ et $v(x) = 1 + \sin x$.

Ainsi, f' est de la forme $\frac{u'v - uv'}{v^2}$, avec $u'(x) = -\sin x$ et $v'(x) = \cos x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\sin x(1 + \sin x) - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2} \\ &= \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2} \\ &= \frac{-\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(1 + \sin x)^2} \\ f'(x) &= -\frac{\sin x + 1}{(1 + \sin x)^2}, \end{aligned}$$

Or, pour tout réel $x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[$, $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $0 \leq \sin x + 1 \leq 2$.

De plus, $(1 + \sin x)^2 > 0$ donc $f'(x) < 0$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[$.

Ainsi, f est strictement décroissante sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[$.

Exercice n°3

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos^3 x \cos(3x).$$

— Montrons d'abord que f est π -périodique.

$$\begin{aligned} f(x + \pi) &= [\cos(x + \pi)]^3 \cos(3(x + \pi)) \\ &= [-\cos x]^3 \cos(3x + 3\pi) \\ &= -\cos^3 x \cos(3x + \pi) \\ &= -\cos^3 x (-\cos(3x)) \\ &= \cos^3 x \cos(3x) \\ f(x + \pi) &= f(x). \end{aligned}$$

Donc f est π -périodique.

On peut donc réduire l'intervalle d'étude à un intervalle d'amplitude π , par exemple $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$.

— Montrons que f est paire. D'abord, le domaine de définition de f est centré en 0.

$$\begin{aligned} \text{De plus, } f(-x) &= [\cos(-x)]^3 \cos(-3x) \\ &= [\cos x]^3 \cos(3x) \\ &= \cos^3 x \cos(3x) \end{aligned}$$

$$f(-x) = f(x).$$

Ainsi, f est paire.

Exercice n°4

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin^3 x \cos(3x).$$

— Montrons d'abord que f est π -périodique.

$$\begin{aligned} f(x + \pi) &= [\sin(x + \pi)]^3 \cos[3(x + \pi)] \\ &= [-\sin x]^3 \cos(3x + 3\pi) \\ &= -\sin^3 x \cos(3x + \pi) \\ &= -\sin^3 x [-\cos(3x)] \\ &= \sin^3 x \cos(3x) \\ f(x + \pi) &= f(x). \end{aligned}$$

La fonction f est donc π -périodique ; on peut donc restreindre l'intervalle d'étude de f à un intervalle d'amplitude π , par exemple $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$.

— Montrons que f est impaire. Le domaine de définition de f est centré en 0. De plus,

$$\begin{aligned} f(-x) &= [\sin(-x)]^3 \cos(-3x) \\ &= [-\sin x]^3 \cos(3x) \\ &= -\sin^3 x \cos(3x) \end{aligned}$$

$$f(-x) = -f(x).$$

La fonction f est donc impaire ; on peut donc réduire l'intervalle d'étude précédent à sa moitié, donc à $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$.

Exercice n°5

On considère la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[$ par :

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}.$$

1. f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = \sin x + \cos x$$

$$u'(x) = \cos x - \sin x$$

$$v(x) = \sin x - \cos x$$

$$v'(x) = \cos x + \sin x$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} \\ &= \frac{-(\sin x - \cos x)^2 - (\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)^2} \\ &= \frac{-\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin x \cos x - \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2} \\ &= \frac{-2\sin^2 x - 2\cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2} \\ &= \frac{-2(\cos^2 x + \sin^2 x)}{(\sin x - \cos x)^2} \\ &= \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2} \text{ car } \cos^2 x + \sin^2 x = 1. \end{aligned}$$

2. On en déduit que $f'(x) < 0$ sur $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[$ (car $-2 < 0$ et $(\sin x - \cos x)^2 > 0$).

Ainsi, f est strictement décroissante sur $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[$.

Exercice n°6

En sciences physiques, notamment en électricité ou en acoustique, on rencontre souvent des fonctions f de la forme :

$$f(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$$

où φ est appelé la *phase* et ω , la *pulsation*.

$f(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$ donc :

$$f'(t) = a \times \omega \cos(\omega t + \varphi).$$

En effet, on sait que la dérivée de $x \mapsto \sin x$ est $x \mapsto \cos x$.

De plus, on sait que la dérivée de $f(at+b)$ est $af'(at+b)$.

Sur le même principe, on a alors :

$$f''(t) = a\omega \times (-\omega \sin(\omega t + \varphi)) = -a\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 f(t).$$

Ainsi,

$$f''(t) + \omega^2 f(t) = -\omega^2 f(t) + \omega^2 f(t) = 0.$$

Exercice n°7

On considère la fonction $f(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$.

1. $f'(x) = -\sin x + x$ et $f''(x) = -\cos x + 1$.

2. On sait que pour tout réel x ,

$$-1 \leq -\cos x \leq 1$$

donc, en ajoutant 1 à chaque membre de cet encadrement, on a :

$$0 \leq f''(x) \leq 2.$$

Donc $f''(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ ce qui signifie que f' est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. $f'(0) = -\sin 0 + 0 = 0$. Or, f' est croissante sur $\mathbb{R}$ donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

$$f(0) = \cos 0 - 1 + \frac{1}{2} \times 0^2 = 1 - 1 + 0 = 0.$$

4. Des variations de f , on déduit que $f(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, dont :

$$\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 \geq 0$$

soit :

$$\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$$

5. Considérons la fonction $g(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4$.

Alors, $g'(x) = -\sin x + x - \frac{1}{6}x^3$ et $g''(x) = -\cos x + 1 - \frac{1}{2}x^2 = -f(x)$.

Ainsi, pour tout réel x , $g''(x) \leq 0$, ce qui signifie que g' est décroissante sur $\mathbb{R}$.

$g'(0) = -\sin 0 + 0 = 0$ d'où :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$			

Par conséquent, $g(x) \leq 0$ sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie que :

$$\cos x \leq 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4.$$

6. De ce qui vient d'être fait, on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

En prenant $x = \frac{\pi}{50}$, cela donne :

$$1 - \frac{\pi^2}{5000} \leq \cos \frac{\pi}{50} \leq 1 - \frac{\pi^2}{5000} + \frac{\pi^4}{150\,000\,000}.$$

Puisque $\frac{\pi^4}{150\,000\,000} < 10^{-6}$, on peut alors considérer qu'une valeur approchée de $\cos \frac{\pi}{50}$ à 10^{-6} près est $1 - \frac{\pi^2}{5000}$.

Exercice n°8

On souhaite étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \cos u_n.$$

1. Un programme Python possible est le suivant :

```
from math import cos
u = 1
for n in range(31):
    u = cos(u)
    print('n = {} et u = {}'.format(n,u))
```

Console :

```
n = 0 et u = 0.5403023058681398
n = 1 et u = 0.8575532158463933
n = 2 et u = 0.6542897904977792
...
n = 29 et u = 0.7390870426953322
n = 30 et u = 0.739083846965000
```

2. Un programme Python possible est le suivant :

```
from math import cos
u,n = 1,0
while abs(u-cos(u)) > 10**(-8):
    u = cos(u)
    print('n = {} et u = {}'.format(n,u))
    n += 1
```

Console :

```
n = 0 et u = 0.5403023058681398
n = 1 et u = 0.8575532158463933
n = 2 et u = 0.6542897904977792
...
n = 42 et u = 0.7390851219886894
n = 43 et u = 0.7390851407774467
n = 44 et u = 0.7390851281211138
```

3. À la vue des termes calculés, la suite ne semble pas monotone.
En effet, $u_0 < u_1$, $u_1 > u_2$, $u_2 < u_3$, etc.
4. Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{2(n+1)} \\ &= u_{2n+2} \\ &= u_{2n+1+1} \\ &= \cos(u_{2n+1}) \\ &= \cos(\cos(u_{2n})) \\ v_{n+1} &= \cos(\cos(v_n)). \end{aligned}$$

5. On a : $f(x) = \cos(\cos x)$ donc :
 $f'(x) = -\sin(x) \times [-\sin(\cos x)] = \sin(x) \times \sin(\cos x)$.
Sur $]0; 1]$, $\sin x \geq 0$; de plus, $\cos x > 0$. Autrement dit, $\sin(\cos x) > 0$. En conséquence, $f'(x) \geq 0$.
La fonction f est donc croissante sur $]0; 1]$.
6. — **Initialisation** : pour $n = 0$, $v_0 = 1$ et $v_1 \approx 0,86$ donc $0 < v_1 < v_0 \leq 1$.
— **Hérédité** : supposons que pour un entier k fixé, $0 < v_{k+1} < v_k \leq 1$.
Alors, $f(0) < f(v_{k+1}) < f(v_k) \leq f(1)$ car f est croissante sur $]0; 1]$.
Or, $f(0) = \cos(\cos 0) \approx 0,54 > 0$ et $f(1) = \cos(\cos 1) \approx 0,86 < 1$.

Donc, $0 < f(v_{k+1}) < f(v_k) \leq 1$, soit $0 < v_{k+2} < v_{k+1} \leq 1$.

L'hérédité est alors vérifiée.

Ainsi, pour tout entier naturel n , $0 < v_{n+1} < v_n \leq 1$.

- D'après ce qui vient d'être démontré, (v_n) est décroissante et minorée (par 0). Donc elle converge. Sa limite est donc le nombre ℓ tel que $\ell = f(\ell)$. Or, $v_n = u_{2n}$ donc la limite de (v_n) est celle de (u_n) . D'après les valeurs données par les algorithmes précédents, on en déduit que $\ell \approx 0,739085$.