

Exercice 1 :

- 1 $u_n = 3 + 4n$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= 3 + 4(n+1) - (3 + 4n) \\&= 3 + 4n + 4 - 3 - 4n \\&= 4.\end{aligned}$$

$u_{n+1} - u_n = 4$ est une constante (un nombre qui ne dépend pas de n) donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $u_0 = 3 + 4 \times 0 = 3$.

- 2 $u_n = 8 \times 2^n$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{8 \times 2^{n+1}}{8 \times 2^n} \\&= \frac{2^n \times 2^1}{2^n} \\&= 2.\end{aligned}$$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$ est une constante donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 8 \times 2^0 = 8$.

- 3 $u_n = 2 \times 3^{n-1}$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2 \times 3^n}{2 \times 3^{n-1}} \\&= \frac{3^{n-1} \times 3}{3^{n-1}} \\&= 3.\end{aligned}$$

Par conséquent, $(u_n)_{n \geq 0}$ est géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $u_0 = 2 \times 3^{0-1} = \frac{2}{3}$.

- 4 $u_n = \sqrt{2^n}$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\sqrt{2^{n+1}}}{\sqrt{2^n}} \\&= \sqrt{\frac{2^{n+1}}{2^n}} \\&= \sqrt{\frac{2^n \times 2}{2^n}} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

$(u_n)_{n \geq 0}$ est donc géométrique de raison $q = \sqrt{2}$ et de premier terme $u_0 = \sqrt{2^0} = 1$.

- 5 $u_n = \frac{5}{3^n}$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{5}{3^{n+1}}}{\frac{5}{3^n}} \times \frac{3^n}{3^n} \\&= \frac{3^n}{3^n \times 3} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

$(u_n)_{n \geq 0}$ est donc géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = \frac{5}{3^0} = 5$.

6 $u_n = n(n+1) - n(n-1) = n^2 + n - n^2 + n = 2n$. u_n est donc de la forme $u_0 + nr$ avec $u_0 = 0$ et $r = 2$.
 $(u_n)_{n \geq 0}$ est donc arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 0$.

7 $u_n = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= (n+2)^2 - (n+1)^2 \\&= (n+2-n-1)(n+2+n+1) \\&= 2n+3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+2)^2}{(n+1)^2} \\&= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 \\&= \left(\frac{n+1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^2 \\&= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2.\end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne sont pas des constantes. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est donc ni arithmétique, ni géométrique.

8 $u_n = \frac{1}{3^n} + 1$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{3^{n+1}} + 1 - \frac{1}{3^n} - 1 \\&= \frac{1}{3^n \times 3} - \frac{1}{3^n} \\&= \frac{1}{3^n} \left(\frac{1}{3} - 1\right) \\&= -\frac{2}{3} \times \frac{1}{3^n}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{1}{3^{n+1}} + 1}{\frac{1}{3^n} + 1} \\&= \frac{\frac{1+3^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{1+3^n}{3^n}} \\&= \frac{1+3^{n+1}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{1+3^n} \\&= \frac{1+3^{n+1}}{3(1+3^n)}.\end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne sont pas des constantes. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est donc ni arithmétique, ni géométrique.

9 $u_n = 2^n + 1$. On calcule :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= 2^{n+1} + 1 - 2^n - 1 \\&= 2^n \times 2 - 2^n \\&= 2^n(2 - 1) \\&= 2^n.\end{aligned}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1} + 1}{2^n + 1}.$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne sont pas des constantes. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est donc ni arithmétique, ni géométrique.

10 $u_n = \frac{\sqrt{2^n}}{3^n}$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\sqrt{2^{n+1}}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{\sqrt{2^n}} \\&= \frac{\sqrt{2^{n+1}}}{\sqrt{2^n}} \times \frac{3^n}{3^{n+1}} \\&= \sqrt{2} \times \frac{1}{3} \\&= \frac{\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

Ainsi, $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{3}$ et de premier terme $u_0 = 1$.

Exercice 2 :

1 $u_{n+1} = 3u_n$, $u_0 = 1$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = qu_n$ donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = 3$.

2 $u_{n+1} = \frac{1}{u_n}$, $u_0 = 1$. Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} - u_n = \frac{1 - u_n^2}{u_n} \neq \text{c}^{\text{te}} \text{ (constante)}.$$

Ainsi, $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est pas arithmétique.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{u_n^2} \neq \text{c}^{\text{te}}.$$

Donc, $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est pas géométrique.

3 $u_n = 2u_{n-1}$, $u_0 = 1$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_n = qu_{n-1}$ donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = 2$.

4 $u_{n+1} = u_n - \pi$, $u_0 = 2\pi$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = u_n + r$ donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique de raison $r = \pi$.

5 $u_{n+1} = 3(u_n - 1) - 2(u_n + 1) = u_n - 5$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = u_n + r$ donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $r = -5$.

6 $u_n = \frac{u_{n-1}}{2} = \frac{1}{2}u_{n-1}$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_n = qu_{n-1}$ donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

7 $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, $u_0 = 2$. Pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n} - (\sqrt{u_n})^2 = \sqrt{u_n}(1 - \sqrt{u_n}) \neq \text{cte}.$$

Donc $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est pas arithmétique.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{u_n}}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{u_n}} \neq \text{cte}.$$

Donc $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est pas géométrique.

8 $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, $u_0 = 1$. La relation de récurrence de cette suite est la même que dans la question précédente. Cependant, le premier terme change.

On a ici : $u_0 = 1$, $u_1 = \sqrt{1} = 1$, etc.

Ainsi, $(u_n)_{n \geq 0}$ est constante. On peut alors dire qu'elle est arithmétique (de raison $r = 0$) et géométrique (de raison $q = 1$).

Exercice 3 :

1 $u_0 = 3$ et $u_8 = 7$. Calculer r .

On sait que :

$$u_n = u_0 + nr$$

donc :

$$u_8 = u_0 + 8r$$

$$7 = 3 + 8r$$

$$7 - 3 = 8r$$

$$r = \frac{4}{8}$$

$$r = \frac{1}{2}.$$

2 $u_2 = 5$ et $u_5 = 2$. Calculer r .

On sait que :

$$u_n = u_k + (n - k)r$$

donc

$$u_5 = u_2 + (5 - 2)r$$

$$2 = 5 + 3r$$

$$2 - 5 = 3r$$

$$3r = -3$$

$$r = -1.$$

3 $u_0 = 5$ et $r = -\frac{1}{2}$. Calculer u_9 .

On sait que :

$$u_n = u_0 + nr$$

donc

$$u_9 = u_0 + 9r$$

$$u_9 = 5 - \frac{9}{2}$$

$$u_9 = \frac{10}{2} - \frac{9}{2}$$

$$u_9 = \frac{1}{2}.$$

4 $u_5 = 6$ et $r = 2$. Calculer u_{20} .

On sait que :

$$u_n = u_k + (n - k)r$$

donc

$$u_{20} = u_5 + (20 - 5)r$$

$$u_{20} = 6 + 15 \times 2$$

$$u_{20} = 6 + 30$$

$$u_{20} = 36.$$

5 $u_7 = \sqrt{2}$ et $u_2 = \sqrt{7}$. Calculer r .

On sait que :

$$u_n = u_k + (n - k)r$$

donc

$$u_7 = u_2 + (7 - 2)r$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{7} + 5r$$

$$5r = \sqrt{2} - \sqrt{7}$$

$$r = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{7}}{5}.$$

Exercice 4 :

1 Si $u_0 = 5$ et $r = 3$, calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_{100}$.

(u_n) est une suite arithmétique donc :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n + 1).$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \dots + u_{100} &= \frac{5 + (5 + 100 \times 3)}{2} \times 101 \\ &= 155 \times 101 \end{aligned}$$

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{100} = 15655.$$

- 2 Si $u_0 = 3$ et $u_{50} = 60$, calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_{50}$.

$$\begin{aligned}u_0 + u_1 + \dots + u_{50} &= \frac{3+60}{2} \times 51 \\&= 31,5 \times 51 \\u_0 + u_1 + \dots + u_{100} &= 1\,606,5.\end{aligned}$$

- 3 Si $u_1 = 60$ et $r = 5$, calculer $u_1 + u_2 + \dots + u_{100}$.

$$\begin{aligned}u_1 + u_2 + \dots + u_{100} &= \frac{u_1 + u_{100}}{2} \times 100 \\&= \frac{60 + (60 + 5 \times 99)}{2} \times 100 \\&= \frac{61\,500}{2} \\u_1 + u_2 + \dots + u_{100} &= 30\,750.\end{aligned}$$

- 4 Si $u_1 = 50$ et $u_{50} = 1$, calculer $u_1 + u_2 + \dots + u_{50}$.

$$\begin{aligned}u_1 + u_2 + \dots + u_{50} &= \frac{u_1 + u_{50}}{2} \times 50 \\&= \frac{50+1}{2} \times 50 \\u_1 + u_2 + \dots + u_{50} &= 1\,275.\end{aligned}$$

Exercice 5 :

- 1 $u_0 = 5$ et $u_2 = 12$. Calculer q .

On sait que :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

donc

$$\begin{aligned}u_2 &= u_0 \times q^2 \\12 &= 5 \times q^2 \\q^2 &= \frac{12}{5} \\q &= \sqrt{\frac{12}{5}} \quad \text{ou} \quad q = -\sqrt{\frac{12}{5}}.\end{aligned}$$

- 2 $u_0 = 3$ et $q = 2$. Calculer u_9 .

On sait que :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

donc

$$\begin{aligned}u_9 &= u_0 \times q^9 \\u_9 &= 3 \times 2^9 \\u_9 &= 1\,536.\end{aligned}$$

- 3 $u_2 = 8$ et $q = \frac{1}{2}$. Calculer u_8 .

On sait que :

$$u_n = u_k \times q^{n-k}$$

donc

$$u_8 = u_2 \times q^{8-2}$$

$$u_8 = 8 \times 2^{-6}$$

$$u_8 = 2^{-3}.$$

- 4 $u_0 = 2$ et $q = \frac{1}{3}$. Calculer u_{10} .

On sait que :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

donc

$$u_{10} = u_0 \times q^{10}$$

$$u_{10} = 2 \times 3^{-10}$$

$$u_{10} = \frac{2}{3^{10}}.$$

- 5 $u_5 = 2$ et $q = \sqrt{2}$. Calculer u_7 .

On sait que :

$$u_n = u_k \times q^{n-k}$$

donc

$$u_7 = u_5 \times q^{7-5}$$

$$u_7 = 2 \times \sqrt{2}^2$$

$$u_7 = 4.$$

Exercice 6 :

3

- 1 Si $u_0 = 1$ et $q = 2$, calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_{100}$.
(u_n) est une suite géométrique donc :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Dès lors,

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{100} = \frac{1 - 2^{101}}{1 - 2}$$

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{100} = 2^{101} - 1.$$

- 2 Si $u_0 = 3$ et $q = \frac{1}{2}$, calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_{50}$.

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \dots + u_{50} &= 3 \times \frac{1 - \frac{1}{2^{51}}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 3 \left(1 - \frac{1}{2^{51}} \right) \times 2 \\ u_0 + u_1 + \dots + u_{50} &= 6 \left(1 - \frac{1}{2^{51}} \right). \end{aligned}$$

3 Si $u_1 = 60$ et $q = \frac{1}{3}$, calculer $u_1 + u_2 + \dots + u_{100}$.

$$\begin{aligned}u_1 + u_2 + \dots + u_{100} &= u_1 \times \frac{1 - q^{100}}{1 - q} \\&= 60 \times \frac{1 - \frac{1}{3^{100}}}{1 - \frac{1}{3}} \\&= 60 \left(1 - \frac{1}{3^{100}} \right) \times \frac{3}{2} \\u_1 + u_2 + \dots + u_{100} &= 45 \left(1 - \frac{1}{3^{100}} \right).\end{aligned}$$

4 Si $u_1 = 50$ et $q = 10$, calculer $u_1 + u_2 + \dots + u_{50}$.

$$\begin{aligned}u_1 + u_2 + \dots + u_{50} &= 50 \times \frac{1 - 10^{50}}{1 - 10} \\u_1 + u_2 + \dots + u_5 &= \frac{50}{9} (10^{50} - 1).\end{aligned}$$

Exercice 7 :

1 $u_n = \frac{2^n}{5}.$

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \frac{2^{n+1}}{5} - \frac{2^n}{5} = \frac{2^{n+1} - 2^n}{5} \\&= \frac{2^n \times 2^1 - 2^n \times 1}{5} = \frac{2^n(2^1 - 1)}{5} \\&= \frac{2^n}{5}.\end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n > 0$.

2 $u_n = \frac{2^n}{5}.$

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \frac{2^{n+1}}{5} - \frac{2^n}{5} = \frac{2^{n+1} - 2^n}{5} \\&= \frac{2^n \times 2^1 - 2^n \times 1}{5} = \frac{2^n(2^1 - 1)}{5} \\&= \frac{2^n}{5} \\u_{n+1} - u_n &> 0.\end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est croissante.

3 $u_n = -n^2 + 5n - 2.$

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= -(n+1)^2 + 5(n+1) - 2 - (-n^2 + 5n - 2) \\&= -(n^2 + 2n + 1) + 5n + 5 - 2 + n^2 - 5n + 2 \\&= -n^2 - 2n - 1 + 5n + 5 - 2 + n^2 - 5n + 2 \\&= -2n + 4.\end{aligned}$$

$$-2n + 4 > 0 \iff -2n > -4 \iff n < 2 \text{ donc } u_{n+1} - u_n < 0 \text{ pour } n \geq 2.$$

La suite (u_n) est donc décroissante à partir du rang 2.

$$4 \quad u_n = \sqrt{n^2 + 3}.$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{(n+1)^2 + 3} - \sqrt{n^2 + 3} \\ &= \sqrt{n^2 + 2n + 4} - \sqrt{n^2 + 3}. \end{aligned}$$

Or, $n^2 + 4 > n^2 + 3$ donc $n^2 + 2n + 4 > n^2 + 3$ (car $n \geq 0$), donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

$$5 \quad u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = u_n - 5.$$

$$u_{n+1} - u_n = u_n - 5 - u_n = -5 < 0 \text{ donc } (u_n) \text{ est décroissante.}$$

✂ Exercice 8 : 3

On définit la suite (u_n) par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2n+1}{n+2}.$

1 On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+1} - \frac{2n+1}{n+2} \\ &= \frac{2n+3}{n+3} - \frac{2n+1}{n+2} \\ &= \frac{(2n+3)(n+2)}{(n+3)(n+2)} - \frac{(2n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{3}{(n+2)(n+3)}. \end{aligned}$$

$n+2 > 0$ et $n+3 > 0$ car $n \in \mathbb{N}$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

La suite (u_n) est donc croissante.

2 Si la suite (u_n) est majorée par 2, alors $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_n - 2 &= \frac{2n+1}{n+2} - 2 \\ &= \frac{2n+1}{n+2} - \frac{2(n+2)}{n+2} \\ &= \frac{2n+1-2n-4}{n+2} \\ &= \frac{-3}{n+2}. \end{aligned}$$

$-3 < 0$ et $n+2 > 0$ donc $u_n - 2 < 0$, soit $u_n < 2$.

Donc la suite est majorée par 2.

3 La suite est croissante donc, nécessairement, $u_n \geq u_0$ pour tout entier naturel n , soit $u_n \geq \frac{1}{2}$.

La suite est donc minorée par $\frac{1}{2}$.

Exercice 9 :**3**

La suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

est croissante. En effet, on calcule $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{u_n^2 + 1} - u_n \\ &= \frac{(\sqrt{u_n^2 + 1} - u_n)(\sqrt{u_n^2 + 1} + u_n)}{\sqrt{u_n^2 + 1} + u_n} \\ &= \frac{u_n^2 + 1 - u_n^2}{\sqrt{u_n^2 + 1} + u_n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{u_n^2 + 1} + u_n}. \end{aligned}$$

$u_n > 0$ car chaque terme est défini comme étant égal à une racine carrée.

De plus, $\sqrt{u_n^2 + 1} > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

La suite est donc croissante.

Exercice 10 :**3**

On définit la suite (u_n) par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad u_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

$$\boxed{2} \quad u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}.$$

Or, $n+2 > n$ donc $\sqrt{n+2} > \sqrt{n}$ et donc, en ajoutant $\sqrt{n+1}$ aux deux membres de cette dernière inégalité, on a $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.

En inversant, on obtient : $\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ (attention à ne pas oublier d'inverser le signe de l'inégalité).

Ceci nous dit alors que $u_{n+1} < u_n$, et donc que (u_n) est décroissante.

$$\boxed{3} \quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0 \text{ donc } u_n > 0. \\ (u_n) \text{ est donc minorée par } 0.$$

De plus, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \geq 1$ (car $\sqrt{n+1} \geq 1$ et $\sqrt{n} \geq 0$) donc $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq 1$, soit $u_n \leq 1$.

(u_n) est donc majorée par 1.

⌘ Exercice 11 :

3

On considère la propriété « $3^n \geq 1 + 2n$ » dont on souhaite démontrer qu'elle est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

- 1 Lorsque $n = 0$, $3^0 = 1$ et $1 + 2 \times 0 = 1$. De plus, $3^0 \geq 1 + 2 \times 0$, ainsi la propriété est initialisée.
- 2 Dans cette question, on décompose le travail à faire au brouillon pour justifier l'hérédité.
 - (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $3^n \geq 1 + 2n$.
 - (b) La propriété au rang $n + 1$: $3^{n+1} \geq 1 + 2(n + 1) \Leftrightarrow 3^{n+1} \geq 2n + 3$.
 - (c) $3 \times 3^n \geq 3(1 + 2n) \Leftrightarrow 3 \times 3^n \geq 3 + 6n$.
 - (d) Pour tout $n \geq 0$, $6n \geq 2n$. Ceci entraîne, $6n + 3 \geq 2n + 3$
- 3 Conclusion : Pour tout entier naturel n , $3^n \geq 1 + 2n$.

⌘ Exercice 12 :

3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On veut montrer que $2 \leq u_n \leq 5$ pour tout $n \geq 0$.

- On considère la propriété : « $\mathcal{P}(n) : 2 \leq u_n \leq 5$ ».
- Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 5$. Donc $2 \leq u_0 \leq 5$: la propriété est vraie pour $n = 0$.
- Hérédité : si la propriété est vraie à un certain rang $n \geq 0$ alors elle est vraie au rang $n + 1$.
Supposons donc que $2 \leq u_n \leq 5$, on a alors :

$$\begin{aligned} 2 &\leq u_n \leq 5 \\ 1 &\leq \frac{1}{2}u_n \leq 2,5 \\ 2 &\leq \frac{1}{2}u_n + 1 \leq 3,5. \end{aligned}$$

On en déduit que $2 \leq u_{n+1} \leq 5$, c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n + 1$.

- Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire ; par récurrence elle est vraie pour tout $n \geq 0$ c'est-à-dire que $2 \leq u_n \leq 5$ pour tout $n \geq 0$.

⌘ Exercice 13 :

3

On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 0$ et $w_n = -\frac{1}{3}w_{n-1} + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- On considère la propriété : « $\mathcal{P}(n) : 1 \leq w_n \leq 4$ ».
- Initialisation : Pour $n = 1$, on a $w_1 = -\frac{1}{3}w_0 + 4 = 4$. Donc $1 \leq w_1 \leq 4$: la propriété est vraie pour $n = 1$.
- Hérédité : si la propriété est vraie à un certain rang $n \geq 0$ alors elle est vraie au rang $n + 1$.
Supposons donc que $1 \leq w_n \leq 4$, on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &\leq \frac{1}{3}w_n \leq \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} &\leq -\frac{1}{3}w_n \leq -\frac{1}{3} \\ 4 - \frac{4}{3} &\leq 4 - \frac{1}{3}w_n \leq 4 - \frac{1}{3} \\ 1 &< \frac{8}{3} \leq 4 - \frac{1}{3}w_n \leq \frac{11}{3} < 4 \end{aligned}$$

On en déduit que $1 \leq w_{n+1} \leq 4$, c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n + 1$.

- Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire ; par récurrence elle est vraie pour tout $n \geq 1$ c'est-à-dire que $1 \leq w_n \leq 4$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 14 :

1 $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

2 — On considère la propriété : « $\mathcal{P}(n) : 3^n \leq n!$ ».

— Initialisation : Pour $n = 7$, on a $7! = 5\,040$ et $3^7 = 2\,187$. Donc $3^7 \leq 7!$: la propriété est vraie pour $n = 7$.

— Hérédité : si la propriété est vraie à un certain rang $n \geq 7$ alors elle est vraie au rang $n + 1$.
Supposons donc que $3^n \leq n!$, on a alors :

$$\begin{aligned} 3 \times 3^n &\leq 3 \times n! \\ 3^{n+1} &\leq 3 \times n! \leq (n+1) \times n! \end{aligned}$$

On en déduit que $3^{n+1} \leq (n+1)!$, c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n + 1$.

— Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 7$ et est héréditaire ; par récurrence elle est vraie pour tout $n \geq 7$ c'est-à-dire que $3^n \leq n!$ pour tout $n \geq 1$.

3 — On considère la propriété : « $\mathcal{P}(n) : n! \leq n^n$ ».

— Initialisation : Pour $n = 1$, on a $1! = 1$ et $1^1 = 1$. Donc $1^1 \leq 1!$: la propriété est vraie pour $n = 1$.

— Hérédité : si la propriété est vraie à un certain rang $n \geq 1$ alors elle est vraie au rang $n + 1$.
Supposons donc que $n! \leq n^n$, on a alors :

$$\begin{aligned} (n+1) \times n! &\leq (n+1) \times n^n \\ (n+1)! &\leq (n+1) \times (n+1)^n \end{aligned}$$

On en déduit que $(n+1)! \leq (n+1)^{n+1}$, c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n + 1$.

— Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire ; par récurrence elle est vraie pour tout $n \geq 1$ c'est-à-dire que $n! \leq n^n$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 15 :

— On considère la propriété : « $\mathcal{P}(n) : 3 \mid 4^n - 1$ ».

— Initialisation : Pour $n = 0$, on a $4^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ et $3 \mid 4^0 - 1$. Donc, la propriété est vraie pour $n = 0$.

— Hérédité : si la propriété est vraie à un certain rang $n \geq 0$ alors elle est vraie au rang $n + 1$.
Supposons donc que $3 \mid 4^n - 1$. Par ailleurs

$$\begin{aligned} 4^{n+1} - 1 &= 4 \times 4^n - 4 + 3 \\ &= 4(4^n - 1) + 3 \end{aligned}$$

On en déduit que $3 \mid 4^{n+1} - 1$, c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n + 1$.

— Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire ; par récurrence elle est vraie pour tout $n \geq 0$ c'est-à-dire que $3 \mid 4^n - 1$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 16 :

3

On considère la propriété « $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ » dont on souhaite démontrer qu'elle est vraie pour tout $n \geq 1$.

1 $\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^n k \right) + (n+1).$

2 — On considère la propriété : « $\mathcal{P}(n) : \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

— Initialisation : Pour $n = 1$, on a $\sum_{k=1}^1 k = 1$ et $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Donc, la propriété est vraie pour $n = 1$.

— Hérédité : si la propriété est vraie à un certain rang $n \geq 1$ alors elle est vraie au rang $n + 1$.

Supposons donc que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^n k \right) + (n+1) = 4 \times \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit que la propriété est vraie au rang $n + 1$.

— Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire ; par récurrence elle est vraie pour tout $n \geq 1$ c'est-à-dire que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \geq 1$.

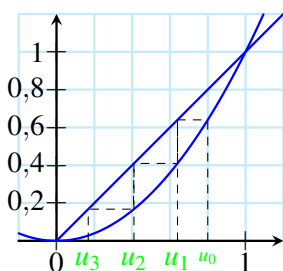
Exercice 17 :

3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,8$ et $u_{n+1} = (u_n)^2$ pour tout entier $n \geq 0$.

On donne ci-dessous la courbe de la fonction carrée et la droite d'équation $y = x$:

1 On constate ci-dessous que la suite semble décroissante :



2 Montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \geq 0$.

— On considère la propriété : « $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$ ».

— Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0,8$ et $u_1 = 0,64$. On a $0 \leq u_1 \leq u_0$: la propriété est vraie pour $n = 0$.

— Hérédité : On va montrer que si la propriété est vraie à un certain rang $n \geq 0$ alors elle est vraie au rang $n + 1$.

Supposons donc que $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$, on a alors :

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_{n+1} \leq u_n \\ 0^2 &\leq u_{n+1}^2 \leq u_n^2 && \text{car la fonction carrée} \\ 0 &\leq u_{n+2} \leq u_{n+1} && \text{est croissante sur } \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

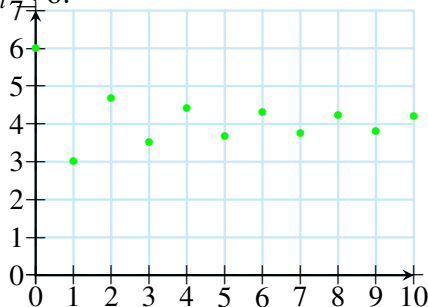
On en déduit que $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$, c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n+1$.

— Conclusion : La propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire ; donc par récurrence elle est vraie pour tout $n \geq 0$ c'est-à-dire que $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \geq 0$. Comme $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite est décroissante.

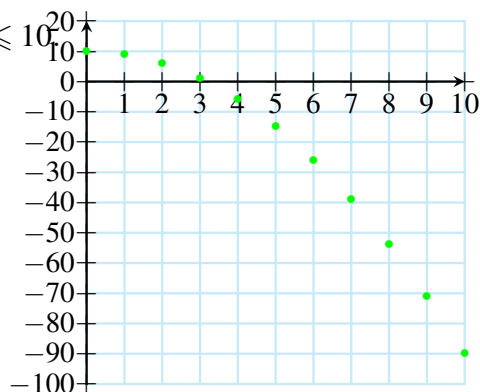
Exercice 18 :

Pour chacune des suites représentées graphiquement ci-dessous, conjecturer un majorant, un minorant ou un encadrement.

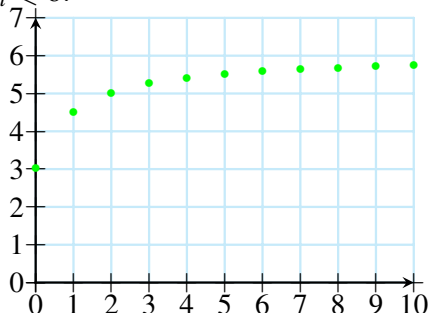
1 $3 \leq u_n \leq 6$.



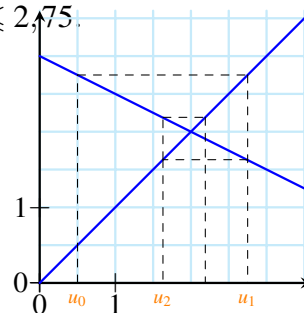
3 $u_n \leq 10$



2 $3 \leq u_n \leq 6$.



4 $0,1 \leq u_n \leq 2,75$.



Exercice 19 :

Donner un minorant et/ou un majorant évident de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

1 $u_n = 3 + 5n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 3$.

2 $u_n = 5 + \frac{1}{n+1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5 \leq u_n \leq 6$.

3 $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq -3$.

4 $u_n = 4(-1)^n + \frac{1}{4}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-4 + \frac{1}{4} \leq u_n \leq 4 + \frac{1}{4}$.

5 $u_n = 1 - \frac{2}{n+1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$.

6 $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) - 4$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-5 \leq u_n \leq -3$.

7 $u_n = n + (-1)^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n-1 \leq u_n \leq n+1$.

Exercice 20 :

1 (a) La fonction $f : x \mapsto x^2 - 4x + 6$ est minorée par l'ordonnée du sommet de sa parabole soit

$f\left(-\frac{-4}{2}\right) = f(2) = 2$ donc la suite de terme général $n^2 - 4n + 6$ est minorée par 2.

(b) De même, la suite de terme général $-3n^2 + 9n - 4$ est majorée par 2,75.

(c) Par inégalités successives, on a $\frac{n^2 - 1}{n + 1} \leq \frac{n^2 + \cos(n)}{n + 1}$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)(n+1)}{n+1} \leq \frac{n^2 + \cos(n)}{n+1}$$

$\Leftrightarrow n-1 \leq \frac{n^2 + \cos(n)}{n+1}$. Or $-1 \leq n-1$ pour $n \in \mathbb{N}$ donc $-1 \leq \frac{n^2 + \cos(n)}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite est minorée par -1 .

(d) — Pour $n \in \mathbb{N}$, $8n + 1 > 0$ et $n + 5 > 0$ donc $\frac{8n+1}{n+5} > 0$: la suite est minorée par 0.

$$- \frac{8n+1}{n+5} - 8 = \frac{-39}{n+5} < 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On en déduit que $\frac{8n+1}{n+5} < 8$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ autrement dit, que la suite est majorée par 8.

(e) — $\frac{-n^2 - 2n + 1}{n^2 + 3n + 2} - (-1) = \frac{n+3}{n^2 + 3n + 2} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\frac{-n^2 - 2n + 1}{n^2 + 3n + 2} > -1$: la suite est minorée par -1 .

$$- \frac{-n^2 - 2n + 1}{n^2 + 3n + 2} - \frac{1}{2} = \frac{-3n^2 - 7n}{2(n^2 + 3n + 2)} < 0 \quad \frac{-n^2 - 2n + 1}{n^2 + 3n + 2} < \frac{1}{2} : \text{la suite est majorée par } \frac{1}{2}.$$

2 Montrons que $2 \leq u_n \leq 5$ pour tout $n \geq 0$.

— On considère la propriété : « $2 \leq u_n \leq 5$ ».

— Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 5$.

$2 \leq u_0 \leq 5$: la propriété est vraie pour $n = 0$.

— Hérédité :

Supposons que $2 \leq u_n \leq 5$:

$$\begin{array}{l} 2 \leq u_n \leq 5 \quad 1 \leq u_n - 1 \leq 4 \\ 1 \leq \sqrt{u_n - 1} \leq 2 \quad 2 \leq 2\sqrt{u_n - 1} \leq 4 \end{array}$$

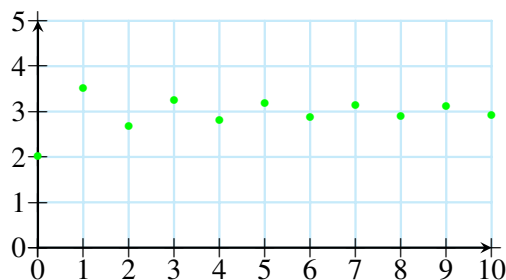
On en déduit que $2 \leq u_{n+1} \leq 5$, c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n + 1$.

— Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire ; donc par récurrence elle est vraie pour tout $n \geq 0$ c'est-à-dire que $2 \leq u_n \leq 5$ pour tout $n \geq 0$.

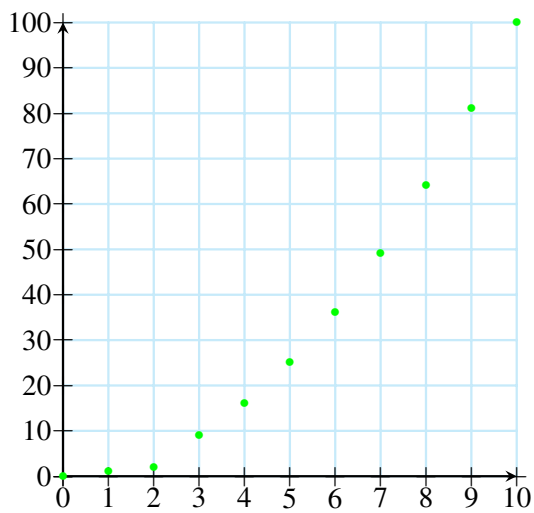
Exercice 21 :

Pour chacune des suites représentées ci-dessous, dire quelle semble être sa limite quand n tend vers $+\infty$.

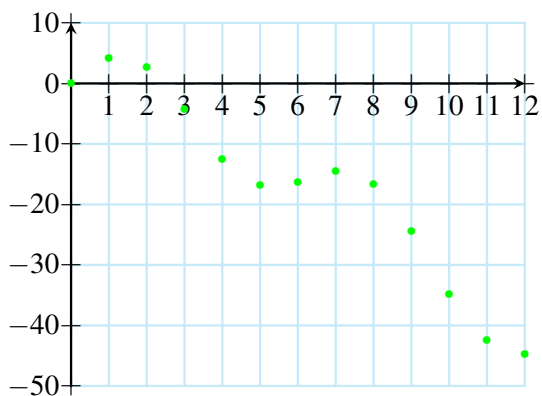
1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.



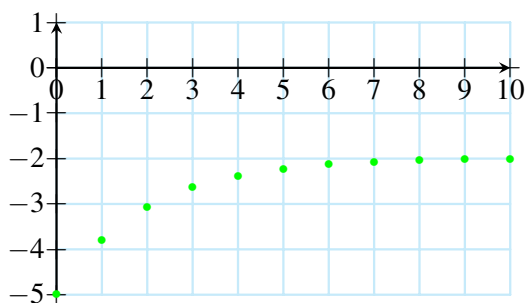
2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.



3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$



4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -2.$



Exercice 22 :

1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n + 3 = +\infty.$

2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n + 6 = -\infty.$

3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty.$

4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6 - n^2 = -\infty.$

5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5\sqrt{n} = +\infty.$

6 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 3}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n + \frac{1}{n})}{n(1 + \frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = +\infty, \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Exercice 23 :

3

1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$

2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n+2}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(6+\frac{2}{n})}{n(2+\frac{1}{n})} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{6}{2} = 3, \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$

3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10n+5}{-5n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(10+\frac{5}{n})}{n(-5+\frac{2}{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10+\frac{5}{n}}{-5+\frac{2}{n}} = \frac{-10}{5} = -2, \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$

4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6 + \frac{5}{\sqrt{n}} = 6 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$

Exercice 24 :

3

1 $11 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 11^n = +\infty.$

2 $1, 1 > 1$ et $-2 < 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2(1,1)^n = -\infty.$

3 $-1 < \frac{-1}{2} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 8 = 8.$

4 $0,99 < 1$ et $3 > 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times 0,99^{n+1} = 0.$

5 On sait que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^7 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Ainsi, par addition on obtient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6n^7 + \frac{3}{n} = +\infty.$

Et par multiplication on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6n^8 + 3n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(6n^7 + \frac{3}{n}) = +\infty.$

6 On sait que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^6 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^4 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^4} = 0.$

Ainsi, par addition on obtient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^2 + 3 - \frac{5}{n^4} = +\infty.$

Et par multiplication on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^6 + 3n^4 - 5 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^4(2n^2 + 3 - \frac{5}{n^4}) = +\infty.$

7 Par multiplication, on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (6n^8 + 3n)(2n^6 + 3n^4 - 5) = +\infty.$

8 Par multiplication, on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^3\sqrt{n} = -\infty.$ En effet, $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^3 = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty.$

9 $3 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n + 8 = +\infty.$

10 Par multiplication, on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{0,5^n}{n} = 0.$ Car, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0.$

11 $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2^n - 5n^2 = -\infty$

12 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{5^{2n-1}} = +\infty$

13 Par quotient, on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8 - \pi^n}{4 + \frac{3}{n}} = -\infty.$ En effet, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 8 - \pi^n = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 + \frac{3}{n} = 4.$

Exercice 25 :

3

1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 2n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \frac{2}{n}\right) = +\infty.$

2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} -3n^3 + 5n^2 + 6n - 1 = -\infty.$

3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 - 3n^4 + 2n^2 - 5n + 2 = -\infty.$

4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 7n + 2)(n^3 - 8n + 1) = +\infty.$

5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2 + 3n + 5}{-2n^2 + 5n - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(6 + \frac{3n}{n^2} + \frac{5}{n^2}\right)}{n^2 \left(-2 + \frac{5n}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}{-2 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2}} \text{ donc}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2 + 3n + 5}{-2n^2 + 5n - 1} = -3.$$

6 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n^7 - 5n^4 + n}{n^2 + 1} = +\infty.$

7 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2 + 4n - 2}{8n^3 + 7n^2 - 4n + 7} = 0.$

Exercice 26 :

3

1 Par encadrements successifs, on a $-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\cos(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$

De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n)}{n^2} = 0$ par le théorème des gendarmes.

2 Par inégalités successives, on a $n^3 - 3 \leq n^3 + 3 \sin(n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 - 3 = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 + 3 \sin(n) = +\infty$ par comparaison.

3 Par inégalités successives, on a $-5n^4 + 2n^4 \sin(\sqrt{n}) \leq -5n^4 + 2n^4 = -3n^4$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -3n^4 = -\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} -5n^4 + 2n^4 \sin(\sqrt{n}) = -\infty$ par comparaison.

4 De même, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^4 - n^3 \cos(n^5) = +\infty$ par comparaison.

5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ par le théorème des gendarmes (idem question 1).

6 Par inégalités successives, on a $n^2 - 2n \leq n^2 + (\sin(n^3) + \cos(n^2))n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 2n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + (\sin(n^3) + \cos(n^2))n = +\infty$ par comparaison.

7 Par encadrements successifs, on a $2 \times 0,7^n \leq (3 + (-1)^n)0,7^n \leq 4 \times 0,7^n.$

De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \times 0,7^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 \times 0,7^n = 0$ car $-1 < 0,7 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3 + (-1)^n)0,7^n = 0$ par le théorème des gendarmes.

Exercice 27 :

3

1 (a) Justifier que $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}.$

(b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1}.$

2 Déterminer les limites suivantes par comparaison après avoir trouvé une inégalité pertinente :

(a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)^4$.

(c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 2n + 3}$.

(e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} -(n+5)^3$.

(b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{6n+5}$.

(d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^3 + 1}$.

(f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+2)^n$.

Exercice 28 :

1 On veut montrer que $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \geq 0$.

— On considère la propriété : « $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$ ».

— Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 5$ et $u_1 = 3,6$.

On a $0 \leq u_1 \leq u_0$: la propriété est vraie pour $n = 0$.

— Hérédité : si la propriété est vraie à un certain rang $n \geq 0$ alors elle est vraie au rang $n + 1$.

Supposons donc que $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$, on a alors :

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_{n+1} \leq u_n \\ 1 &\leq u_{n+1} + 1 \leq u_n + 1 \\ 1^2 &\leq (u_{n+1} + 1)^2 \leq (u_n + 1)^2 \\ \frac{1}{10} &\leq \frac{1}{10}(u_{n+1} + 1)^2 \leq \frac{1}{10}(u_n + 1)^2 \end{aligned}$$

car la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

On en déduit que $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$, c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n + 1$.

— La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire ; donc par récurrence elle est vraie pour tout $n \geq 0$ c'est-à-dire que $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \geq 0$.

2 Comme $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite est décroissante.

— De plus, $0 \leq u_n$, c'est-à-dire que la suite est minorée par 0.

La suite (u_n) est décroissante et minorée : elle est convergente.

3 $\ell = \frac{1}{10}(\ell + 1)^2 \Leftrightarrow 10\ell = \ell^2 + 2\ell + 1$
 $\Leftrightarrow \ell^2 - 8\ell + 1 = 0$.

Cette équation résolue, on trouve deux solutions :

$\ell_1 = 4 - \sqrt{15} \approx 0,13$ et $\ell_2 = 4 + \sqrt{15} \approx 7,87$.

Comme on admet d'après l'énoncé que $\ell \leq 5$, on en déduit que la limite de la suite est $4 - \sqrt{15}$.

Exercice 29 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{5}{12} \right\}$ par $f(x) = \frac{-60x + 68}{-12x + 5}$.

1 Étudier les variations de f .

2 Montrer que si $x \in [2 ; 4]$ alors $f(x) \in [2 ; 4]$.

3 En déduire que (u_n) est bornée par 2 et 4.

4 (a) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{12u_n^2 - 65u_n + 68}{-12u_n + 5}$.

(b) Dresser le tableau de signe de $\frac{12x^2 - 65x + 68}{-12x + 5}$.

(c) En déduire que (u_n) est croissante.

5 Que peut-on en déduire sur le comportement de (u_n) quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 30 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1 (a) Dans un repère orthonormé, tracer les droites d'équation $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + 4$.
- (b) Sans calcul, placer les 5 premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
- (c) Conjecturer une minoration, une majoration et les variations de (u_n) .

2 Démontrer ces conjectures.

3 En déduire que (u_n) est convergente.

4 Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 31 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.

1 Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

2 Montrer que la suite (u_n) est minorée par 1.

3 En déduire que la suite (u_n) est convergente, sans utiliser les propriétés sur les opérations des limites.

Exercice 32 :

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 1 - \frac{1}{n^2}$.

1 Montrer que la suite (v_n) est strictement croissante.

2 Montrer que la suite (v_n) est majorée par 1.

3 En déduire que la suite (v_n) est convergente sans utiliser les propriétés sur les opérations des limites.

Exercice 33 :

Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \frac{6n+3}{n+1}$.

1 Étudier les variations de la suite (v_n) .

2 Montrer que (v_n) est majorée par 6.

3 En déduire que la suite (v_n) est convergente.