

Exercice 1 :

- 1 $\ln(8) = \ln(2^3) = 3 \ln 2.$
- 2 $\ln(8) + \ln(32) = \ln(2^3) + \ln(2^5) = 3 \ln 2 + 5 \ln 2 = 8 \ln 2.$
- 3 $\ln(64) - \ln(8) = \ln(2^6) - \ln(2^3) = 6 \ln 2 - 3 \ln 2 = 3 \ln 2.$
- 4 $\ln(16) - 3 \ln(2) = \ln(2^4) - 3 \ln 2 = 4 \ln 2 - 3 \ln 2 = \ln 2.$

Exercice 2 :

- 1 $\ln\left(\frac{1}{9}\right) = -\ln 9 = -\ln(3^2) = -2 \ln 3.$
- 2 $\ln(81) - 2 \ln(3) = \ln(3^4) - 2 \ln 3 = 4 \ln 3 - 2 \ln 3 = 2 \ln 3.$
- 3 $\ln\left(\frac{3}{e}\right) = \ln 3 - \ln e = \ln 3 - 1.$
- 4 $\ln(9e^2) = \ln 9 + \ln(e^2) = \ln(3^2) + 2 = 2 \ln 3 + 2.$

Exercice 3 :

- 1 $f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1.$
- 2 $f'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = \frac{2 \ln x}{x}.$
- 3 $f'(x) = -\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{x(\ln x)^2}.$
- 4 $f'(x) = \frac{4 \times \frac{1}{x} \times x^2 - 4 \ln x \times 2x}{x^4} = \frac{4x - 8x \ln x}{x^4} = \frac{4 - 8 \ln x}{x^3}.$

Exercice 4 :

- 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x + \ln x = +\infty.$
- 2 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x \times \frac{1}{x} = -\infty.$
- 3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln x = -\infty$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x) = -\infty.$
- 4 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 3(\ln x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 = 0^2 = 0$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 3(\ln x) + x^2 = -\infty.$
- 5 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} - \ln x = +\infty.$

Exercice 5 : 3

- 1 Condition d'existence : $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.
Sous cette condition, on a : $\ln(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x + 1) = \ln 1 \Leftrightarrow x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
Ainsi, $S = \{0\}$.
- 2 Condition d'existence : $2 - 3x > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} > x$
Sous cette condition, on a : $\ln(2 - 3x) = \ln 4 \Leftrightarrow 2 - 3x = 4 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$.
Ainsi, $S = \{-\frac{2}{3}\}$.
- 3 Condition d'existence : $4x > 0$ et $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$.
Sous cette condition, on a : $\ln(4x) = \ln(x - 3) \Leftrightarrow 4x = x - 3 \Leftrightarrow x = -1$.
Or -1 ne vérifie pas la condition d'existence. Donc, $S = \emptyset$
- 4 Condition d'existence : $x - 1 > 0$ et $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.
Sous cette condition, on a :

$$\begin{aligned}\ln(x - 1) + \ln(x - 2) = \ln 6 &\Leftrightarrow \ln[(x - 1)(x - 2)] = \ln 6 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) = 6 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x - x + 2 = 6 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0. (*)\end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation (*) est égal à : $\Delta = 25$.
 Δ étant > 0 , cette équation admet deux solutions : $x_1 = -1$ et $x_2 = 4$.
Or, x_1 qui ne vérifie pas la condition d'existence. Donc, $S = \{4\}$.

- 5 Condition d'existence : $x > 0$.
Sous cette condition : $\ln x = 4 \Leftrightarrow x = e^4$.
Ainsi, $S = \{e^4\}$.
- 6 Condition d'existence : $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$.
Sous cette condition : $\ln(2x) = 5 \Leftrightarrow 2x = e^5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}e^5$.
Ainsi, $S = \{\frac{1}{2}e^5\}$.
- 7 Condition d'existence : $3x > 0 \Leftrightarrow x > 0$.
Sous cette condition, on a : $\ln(3x) = 1 \Leftrightarrow 3x = e^1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}e$.
Ainsi, $S = \{\frac{1}{3}e\}$.
- 8 Condition d'existence : $1 + x > 0 \Leftrightarrow x > -1$.
Sous cette condition : $\ln(1 + x) = -2 \Leftrightarrow 1 + x = e^{-2} \Leftrightarrow x = e^{-2} - 1$.
Ainsi, $S = \{e^{-2} - 1\}$.

Exercice 6 : 3

- 1 Condition d'existence : $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.
Sous cette condition, on a : $\ln(x + 1) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(x + 1) \leq \ln 1 \Leftrightarrow x + 1 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$.
Ainsi, $S =]-1; 0]$.
- 2 Condition d'existence : $x > 0$.
Sous cette condition, on a : $\ln x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq e^3$.
Ainsi, $S = [e^3; +\infty[$.
- 3 Condition d'existence : $x > 0$.
Sous cette condition, on a : $1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \ln x \Leftrightarrow e^1 \geq x$.
 $S =]0; e]$.

✚ Exercice 7 : 3

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, donc, par somme, on obtient : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, donc, par somme de limites, on obtient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ (une fonction linéaire et la fonction inverse).

Dès lors, $f'(x) = x + \frac{1}{x}$. Ainsi, f' est strictement positif sur $]0; +\infty[$.

En conséquence, f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

✚ Exercice 8 : 3

Soit f la fonction définie sur $[0, 5; +\infty[$ par $f(x) = x(\ln x - 1)$.

1 On sait que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - 1 = +\infty$.

Ainsi, par produit de limite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2 f est dérivable sur $[0, 5; +\infty[$, car c'est le produit de deux fonctions dérivables sur $[0, 5; +\infty[$.

Posons, $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x) - 1$.

On a alors, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.

Dès lors,

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 1 \times (\ln x - 1) + x \times \frac{1}{x} \\ &= \ln x - 1 + 1 \\ &= \ln x. \end{aligned}$$

On déduit alors le tableau de variations suivant.

x	0, 5	1	$+\infty$
$f'(x) = \ln x$	-	0	+
$f(x)$	$0, 5(\ln 0, 5 - 1)$	-1	$+\infty$

3 On sait que : $\ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq e^1$.

On déduit alors le tableau de signe suivant.

x	0, 5	e	$+\infty$
x	+	+	+
$\ln x - 1$	-	0	+
$f(x)$	-	0	+

On peut également utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

✚ Exercice 9 : 3

Quand l'oreille d'un individu est soumise à une pression acoustique x , exprimée en bars, l'intensité sonore,

exprimée en décibels, du bruit responsable de cette pression est donnée par :

$$f(x) = 8,68 \times \ln x + 93,28$$

1 $f(5) = 107,25$ décibels.

2 f est dérivable sur $]0; +\infty[$, car c'est la composée de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ (la fonction affine $x \rightarrow 8,68x + 93,28$ et la fonction $\ln$). Ainsi, $f'(x) = 8,68 \times \frac{1}{x}$.
De plus, pour tout $x > 0$, f' reste strictement positif.

3 on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 8,68 \times \ln x = +\infty$ car $8,68 > 0$. En conséquence, par somme, on obtient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 8,68 \times \ln x + 93,28 = +\infty$.

(a) On cherche à connaître le premier nombre entier x de bars pour lequel l'intensité $f(x)$ dépasse 120 décibels à l'aide d'un script python.

Pour cela on part d'une pression $x = 1$ que l'on augmente de 1 tant que cela est nécessaire.

Compléter la 3^e ligne du code python ci-dessous pour qu'il réponde au problème :

```
from math import *
x=1
while 8.68*log(x)+93.28 <=120 :
    x=x+1
print(x)
```

(b) On a :

$$\begin{aligned} 8,68 \times \ln x + 93,28 &= 120 \Leftrightarrow 8,68 \times \ln x = 26,72 \\ &\Leftrightarrow \ln x = \frac{26,72}{8,68} \\ &\Leftrightarrow x = e^{\frac{26,72}{8,68}}. \end{aligned}$$

Ainsi, $x \approx 21,72$. En conséquence, le premier entier qui convient est 22 et c'est le résultat qui devrait s'afficher.

Exercice 10 :

La fonction B est dérivable sur $[1;6]$, comme somme de deux fonctions dérivables sur $[1;6]$ (la fonction polynôme $x \rightarrow -x^2 + 10x - 9$ et la fonction $x \rightarrow -8 \ln(x)$). Ainsi,

$$B'(x) = -2x + 10 - 9,8 \times \frac{1}{x} = \frac{-2x^2 + 10x - 8}{x}.$$

Le signe de $B'(x)$ est le même que celui du trinôme $-2x^2 + 10x - 8$.

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 36$.

Δ étant > 0 , ce trinôme admet deux racines : $x_1 = 4$ et $x_2 = 1$. On déduit alors le tableau de variations suivant.

x	1	4	6	
$-2x^2 + 10x - 8$	0	+	0	−
x		+		+
$B'(x)$		−	0	+
$B(x)$	0	3,9096		0.6659

En conséquence, il faudra produire 4 centaines d'objets pour obtenir un bénéfice maximal.

Exercice 11 :

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 3 - 2x - \ln x$.

- 1 On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 3 - 2x = 3$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$, donc par somme de limites on obtient : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.
 On a également : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - 2x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, donc par somme de limites on obtient :
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
- 2 La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$, comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ (la fonction affine $x \rightarrow 3 - 2x$ et la fonction $x \rightarrow -\ln(x)$). Ainsi, $f'(x) = -2 - \frac{1}{x}$.
 Or, pour tout $x > 0$; $-2 - \frac{1}{x} < 0$. Donc, $f'(x)$ est strictement négatif sur $]0; +\infty[$.
 En conséquence, f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
- 3 L'équation de la tangente, à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1, est donnée par :

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ &= -3(x-1) + 1 \\ &= -3x + 4. \end{aligned}$$

- 4 Étudions le signe de $f(x) - (3 - 2x) = -\ln x$.
 Sur $]0; 1[$, $\ln x < 0$ et $-\ln x > 0$. La courbe de f est au dessus de la droite D sur $]0; 1[$.
 Sur $]0; +\infty[$, $\ln x > 0$ et $-\ln x < 0$. La courbe de f est en dessous de la droite D sur $]0; +\infty[$.
- 5 Sur $[1; 2]$, f est continue et strictement décroissante.
 De plus, $f(1) = 1 > 0$ et $f(2) \approx -1,7 < 0$.
 Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur x_0 telle que $f(x_0) = 0$.
 En utilisant la méthode du balayage sur la calculatrice, on obtient : $1,3 < x_0 < 1,4$.
 1,3 est ainsi une valeur approchée de x_0 à 0,1 près, par défaut.
- 6 La fonction dérivée $f' : x \rightarrow -2 - \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ (la fonction constante $x \rightarrow -2$ et la fonction $x \rightarrow -\frac{1}{x}$). Ainsi,

$$f''(x) = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}.$$

Or, pour tout $x > 0$, $f''(x) > 0$. Donc, f est convexe sur $]0; +\infty[$.

Exercice 12 :

Le but de cet exercice est de s'entraîner sur l'utilisation de la formule $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$. C'est à vous de jouer.

- 1 $f'(x) = \frac{3}{3x-6} = \frac{1}{x-2}$.
- 2 $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.
- 3 $f'(x) = \frac{-2}{-2x+4} = \frac{1}{x-2}$.
- 4 $f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x}} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{3x+1}{x}} = -\frac{1}{x^2} \times \frac{x}{3x+1} = -\frac{1}{x(3x+1)}$.
- 5 $f'(x) = \frac{\frac{3 \times (x-2) - 3x \times 1}{(x-2)^2}}{\frac{3x}{x-2}} = \frac{-6}{(x-2)^2} \times \frac{x-2}{3x} = \frac{-2}{3(x-2)}$.

3

3

- 1** On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$, donc par produit, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.

On peut alors déduire les tableaux de variations suivants.

x	x
0	0
1	1
$f'(x)$	$g'(x)$
—	+
$f(x)$	$g(x)$
$+\infty$ 0	$4 \ln 7$ 0

- Or, $x_1 = -\frac{1}{2} \notin]0; 1]$ et $x_2 = \frac{1}{3} \in]0; 1]$. Donc, le prix d'équilibre est égal à $\frac{1}{3}$.

3

- ## Entraînement

2 Pour entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 0,01 &\Leftrightarrow \ln\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] \leq \ln(0,01) \\ &\Leftrightarrow \underbrace{n \ln\left(\frac{1}{3}\right)}_{-} \leq \ln(0,01) \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}.\end{aligned}$$

Or, $\frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} \approx 4,19$ donc le plus petit entier qui convient est $n = 5$.

3 Pour entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned}(1,03)^n \geq 2 &\Leftrightarrow \ln[(1,03)^n] \geq \ln(2) \\ &\Leftrightarrow \underbrace{n \ln(1,03)}_{+} \geq \ln(2) \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(2)}{\ln(1,03)}.\end{aligned}$$

Or, $\frac{\ln(2)}{\ln(1,03)} \approx 23,45$ donc le plus petit entier qui convient est $n = 24$.

4 Pour entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned}(0,95)^n \leq 0,2 &\Leftrightarrow \ln[(0,95)^n] \leq \ln(0,2) \\ &\Leftrightarrow \underbrace{n \ln(0,95)}_{-} \leq \ln(0,2) \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,95)}.\end{aligned}$$

Or, $\frac{\ln(0,2)}{\ln(0,95)} \approx 31,37$ donc le plus petit entier qui convient est $n = 32$.

Exercice 15 :

L'échelle de Richter sert à mesurer la puissance d'un tremblement de terre. La magnitude d'un séisme sur cette échelle est donnée par $M = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$ où A représente l'amplitude maximale des ondes relevée par un sismographe et A_0 une amplitude référence.

1 On sait que : $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$. Dès lors,

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{A}{A_0}\right) = 5 &\Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{A}{A_0}\right)}{\ln(10)} = 5 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = 5\ln(10) \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = \ln(10^5) \\ &\Leftrightarrow \frac{A}{A_0} = 10^5.\end{aligned}$$

2 On sait que : $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$. Dès lors,

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{100 \times A}{A_0}\right) &= \log(100) + \log\left(\frac{A}{A_0}\right) = \frac{\ln(100)}{\ln(10)} + \log\left(\frac{A}{A_0}\right) \\ &= \frac{\ln(10^2)}{\ln(10)} + \log\left(\frac{A}{A_0}\right) \\ &= \frac{2\ln(10)}{\ln(10)} + \log\left(\frac{A}{A_0}\right) \\ &= 2 + \log\left(\frac{A}{A_0}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, la magnitude augmente de 2.

Exercice 16 :

Pour mesurer la perte de puissance dans une fibre optique, on utilise le coefficient d'atténuation (exprimé en décibels par kilomètre) défini par $A = \frac{1}{L} \times 10 \times \log\left(\frac{P_e}{P_s}\right)$ où L est la longueur (en kilomètres) de la fibre optique, P_e est la puissance (en mW) du signal lumineux à l'entrée de la fibre et P_s est la puissance (en mW) du signal lumineux à la sortie de la fibre.

1 $A = \frac{1}{5} \times 10 \times \log\left(\frac{5}{3,5}\right) \approx 0,31$ décibels par kilomètre.

2 $A = \frac{1}{10} \times 10 \times \log(10) = 1$ décibel par kilomètre.

3 On a toujours $P_s < P_e$ (la puissance de sortie est toujours inférieure à la puissance d'entrée)
Donc $\frac{P_e}{P_s} > 1$ et $\log\left(\frac{P_e}{P_s}\right) > 0$. A ne peut donc pas être négatif.
