

Exercice 1 :

- 1 a. Dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a les points suivants :
 $H(0; 2; 2)$, $M(3; 0; 1)$ et $N(3; 1; 1)$.

b. On a $\overrightarrow{HM} = \begin{pmatrix} x_M - x_H \\ y_M - y_H \\ z_M - z_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

La droite (HM) est dirigée par $\overrightarrow{HM}$ et elle passe par H, elle admet donc comme représentation

paramétrique : $\begin{cases} x = x_H + t x_{\overrightarrow{HM}} \\ y = y_H + t y_{\overrightarrow{HM}} \\ z = z_H + t z_{\overrightarrow{HM}} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$, soit ici : $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

- 2 Les droites (EH) et (MN) sont parallèles donc les droites (HM) et (EN) sont coplanaires et non parallèles, elles sont donc sécantes.

On a $\overrightarrow{EN} = \begin{pmatrix} x_N - x_E \\ y_N - y_E \\ z_N - z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

La droite (EN) est dirigée par $\overrightarrow{EN}$ et elle passe par E, elle admet donc comme représentation paramé-

trique : $\begin{cases} x = x_E + t x_{\overrightarrow{EN}} \\ y = y_E + t y_{\overrightarrow{EN}} \\ z = z_E + t z_{\overrightarrow{EN}} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$, soit ici : $\begin{cases} x = 3t' \\ y = t' \\ z = 2 - t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$

Pour trouver l'intersection des droites (EH) et (MN), il faut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 3t = 3t' \\ 2 - 2t = t' \\ 2 - t = 2 - t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = t' \\ 2 - 2t = t \\ 2 - t = 2 - t \end{cases} \iff \begin{cases} t = t' \\ 2 = 3t \\ 0 = 0 \end{cases} \iff t = t' = \frac{2}{3}$$

Le point d'intersection est donc le point P de coordonnées $\left(2; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

Exercice 2 :

- 1 L'équation paramétrique de d_2 montre qu'elle contient le point de coordonnées $(-3; 0; 5)$ et de vecteur directeur dont les composantes sont les coefficients de k donc $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- 2 Les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont manifestement pas colinéaires, donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

- 3 Une représentation paramétrique de la droite d_1 est $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

S'il existe un point commun aux deux droites, il doit donc exister des réels k et t tels que :

$$\begin{cases} x = 2 + t = 2k - 3 \\ y = 3 - t = k \\ z = t = 5 \end{cases}$$

La dernière équation donne $t = 5$, puis la deuxième $k = 3 - 5 = -2$ et en remplaçant dans la première $2 + 5 = -4 - 3$: cette égalité est fausse, donc d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.

- 4 Les droites n'étant ni sécantes ni parallèles elles ne sont pas coplanaires.

Exercice 3 :

1 On a : $E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2 La droite (EC) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{EC} \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Donc la droite (EC) a pour représentation paramétrique ;

$$\begin{cases} x = x_E + 1 \times t \\ y = y_E + 1 \times t \\ z = z_E + (-1) \times t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Exercice 5 :

1 On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4-3 \\ -1-(-1) \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0-3 \\ 3-(-1) \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a $x_{\overrightarrow{AC}} = -3x_{\overrightarrow{AB}}$, mais $y_{\overrightarrow{AC}} \neq -3y_{\overrightarrow{AB}}$, les vecteurs sont donc non colinéaires, et donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

- 2 On sait que A, B et C ne sont pas alignés, et donc qu'ils définissent un plan. Pour montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires, il suffit de montrer que D est un point du plan (ABC), ce qui équivaut à prouver qu'un vecteur reliant un point du plan (ABC) au point D est coplanaire à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).

Pas tout à fait au hasard (car on a regardé l'énoncé de la question suivante), on va choisir d'exprimer le vecteur $\overrightarrow{CD}$ en fonction d'une base de (ABC) constituée des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dont on a déjà déterminé les coordonnées précédemment.

On a : $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 4-0 \\ 3-3 \\ -2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

On remarque que l'on a : $\overrightarrow{CD} = 4 \times \overrightarrow{AB} + 0 \times \overrightarrow{AC}$.

Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ peut donc être écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc c'est un vecteur du plan (ABC), et puisque C est dans le plan (ABC), on en déduit que D est également dans (ABC).

Finalement, puisque D est dans (ABC), les quatre points A, B, C et D sont bien coplanaires.

- 3 À la question précédente, on a établi $\overrightarrow{CD} = 4 \times \overrightarrow{AB} + 0 \times \overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{CD} = 4 \times \overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ étant colinéaires, les segments [AB] et [CD] sont portés par des droites parallèles (strictement, car C n'est pas aligné avec A et B).

ABCD est donc une figure plane (les quatre points étant coplanaires), c'est donc un quadrilatère, non croisé (puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires de même sens, cela signifie que ABDC est non croisé, ABCD serait un quadrilatère croisé), dont les côtés [AB] et [DC] sont parallèles : le quadrilatère ABDC est donc bien un trapèze, de bases [AB] et [DC].

