

Exercice 1 :

- 1 L'équation différentielle est de la forme $y' = ay$ avec $a = -0,1$.
Les solutions sont données par $f(x) = ke^{-ax} = ke^{-0,1x}$ où $k \in \mathbb{R}$.

- 2 L'équation différentielle est de la forme $y' = ay$ avec $a = \frac{5}{3}$. En effet,
$$3y' = 5y \Leftrightarrow y' = \frac{5}{3}y.$$

Les solutions sont données par $f(x) = ke^{-ax} = ke^{\frac{5}{3}x}$ où $k \in \mathbb{R}$.

- 3 L'équation différentielle est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = 8$ et $b = 5$.
Les solutions sont données par $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a} = ke^{8x} - \frac{5}{8}$ où $k \in \mathbb{R}$.

- 4 L'équation différentielle est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -\frac{2}{3}$ et $b = \frac{1}{3}$. En effet,
$$2y + 3y' - 1 = 0 \Leftrightarrow 3y' + 2y = 1 \Leftrightarrow y' = -\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}.$$

Les solutions sont données par $f(x) = ke^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 :

15 mg de pénicilline sont injectés dans le sang d'un patient.

On suppose que l'injection est instantanée et que la vitesse de son élimination est proportionnelle à la quantité restant dans le sang.

On note t le temps écoulé, en minute, après injection de la pénicilline, et $f(t)$ la quantité, en milligramme, de pénicilline présente dans le sang à l'instant t .

La fonction f , ainsi définie, est la solution de l'équation différentielle $y' = -0,04y$ telle que $f(0) = 15$.

- 1 • L'équation différentielle est de la forme $y' = ay$ avec $a = -0,04$.
Les solutions sont données par $f(t) = ke^{at} = ke^{-0,04t}$ où $k \in \mathbb{R}$.
• Or, $f(0) = 15 \Leftrightarrow ke^0 = 15$. Donc, $k = 15$.
La solution cherchée est donc définie par $f(t) = 15e^{-0,04t}$.

- 2 $f(40) = 15e^{-0,04 \times 40} \approx 3,03$ mg.

- 3 $f'(t) = 15(-0,04e^{-0,04t}) = -0,6e^{-0,04t}$.

Or, pour tout réel t , $f'(t) < 0$ car un exponentiel est toujours strictement positif.
Donc f est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

- 4 On sait que : $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} -0,04t = -\infty \\ \lim_{T \rightarrow -\infty} e^T = 0 \end{cases}$ donc, par composition, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,04t} = 0$.
En conséquence, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

5 Quantité moyenne est donnée par :

$$\begin{aligned}\frac{1}{30-0} \int_0^{30} f(t) dt &= \frac{1}{30} \int_0^{30} 15 e^{-0,04t} dt \\&= \frac{1}{30} \left[\frac{15}{-0,04} e^{-0,04t} \right]_0^{30} \\&= \frac{1}{30} [-375 e^{-0,04t}]_0^{30} \\&= \frac{1}{30} [-375 e^{-1,2} + 375] \\&= -12,5 e^{-1,2} + 12,5 \\&\approx 8,73 mg.\end{aligned}$$

Exercice 3 :

On note $N(t)$, la vitesse de rotation angulaire (en tours par minute) à l'instant t (en minutes) d'un disque lorsque sa rotation est freinée par un certain liquide.

Sachant que N est la solution de l'équation différentielle $y' = -(\ln 100)y$ telle que $N(0) = 1500$:

1 L'équation différentielle est de la forme $y' = ay$ avec $a = -\ln 100$.

Les solutions sont données par $f(t) = k e^{-at} = k e^{-(\ln 100)t}$ où $k \in \mathbb{R}$.

$N(t)$ est donc de la forme $N(t) = k e^{-(\ln 100)t}$.

Or, $N(0) = 1500$, donc $N(0) = 1500 \Leftrightarrow k e^0 = 1500 \Leftrightarrow k = 1500$.

La solution cherchée est donc définie par $N(t) = 1500 e^{-(\ln 100)t}$.

2 $N(1) = 1500 e^{-(\ln 100)} = 1500 e^{\ln(\frac{1}{100})} = 1500 \times \frac{1}{100} = 15$ tours par minute.

3 Cela revient à chercher t tel que $N(t) = 1$.

$$\begin{aligned}N(t) = 1 &\Leftrightarrow 1500 e^{-(\ln 100)t} = 1 \\&\Leftrightarrow e^{-(\ln 100)t} = \frac{1}{1500} \\&\Leftrightarrow -(\ln 100)t = \ln\left(\frac{1}{1500}\right) \\&\Leftrightarrow -(\ln 100)t = -(\ln 1500) \\&\Leftrightarrow t = \frac{\ln 1500}{\ln 100} \\&\approx 1,6 \text{ minutes.}\end{aligned}$$

Exercice 4 :

1 L'équation différentielle est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0,0001$ et $b = 0,01$.

Les solutions sont définies par $f(t) = k e^{at} - \frac{b}{a} = k e^{-0,0001t} + \frac{0,01}{0,0001} = k e^{-0,0001t} + 100$ où $k \in \mathbb{R}$.

Or, $f(0) = 20$ donc $f(0) = 20 \Leftrightarrow k e^0 + 100 = 20 \Leftrightarrow k = -80$.

La solution cherchée est donc définie par $f(t) = -80 e^{-0,0001t} + 100$.

2 $\lim_{t \rightarrow +\infty} -0,0001t = -\infty$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,0001t} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} -80 e^{-0,0001t} = 0$. On en déduit que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 100$.

3 $f'(t) = -80 (-0,0001 e^{-0,0001t}) = 0,008 e^{-0,0001t} > 0$ sur $[0; +\infty[$. f est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

4 Cela revient à chercher t tel que $f(t) = 85$.

$$\begin{aligned} -80e^{-0,0001t} + 100 &= 85 \Leftrightarrow -80e^{-0,0001t} = -15 \Leftrightarrow e^{-0,0001t} = \frac{15}{80} \Leftrightarrow e^{-0,0001t} = 0,1875 \Leftrightarrow \\ -0,0001t &= \ln(0,1875) \\ \Leftrightarrow t &= \frac{\ln(0,1875)}{-0,0001} \approx 16740 \text{ secondes. Ce qui correspond à 4 heures et 39 minutes.} \end{aligned}$$

Exercice 5 :

Après de violents orages, des eaux de ruissellement contenant 4% de pesticides se déversent dans un bassin aménagé pour la baignade. Un système d'évacuation permet de maintenir dans la bassin un volume d'eau constant de 30 000 litres.

1 • Recherche de la forme des solutions de $y' + 0,005y = 6$:

L'équation différentielle est de la forme $y' + ay = b$ avec $a = 0,005$ et $b = 6$.

Les solutions sont définies par :

$$f(t) = ke^{-at} + \frac{b}{a} = ke^{-0,005t} + \frac{6}{0,005} = ke^{-0,005t} + 1200.$$

• Recherche de la solution telle que $f(0) = 0$:

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow ke^0 + 1200 = 0 \Leftrightarrow k = -1200.$$

La solution cherchée est donc définie par $f(t) = -1200e^{-0,005t} + 1200$

2 2% correspond à un volume de $\frac{2}{100} \times 30000 = 600$ litres. On cherche donc t tel que $f(t) = 600$.

$$\begin{aligned} -1200e^{-0,005t} + 1200 &= 600 \Leftrightarrow -1200e^{-0,005t} = -600 \Leftrightarrow e^{-0,005t} = 0,5 \\ \Leftrightarrow -0,005t &= \ln 0,5 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 0,5}{-0,005} \approx 139 \text{ minutes.} \end{aligned}$$