

Limites

Limite aux infinis

Asymptote
horizontale

Limite en un point
fini

Asymptote verticale

Limites des
fonctions usuelles

Opérations sur les
limites

Théorème de
comparaison

Théorème des
gendarmes

Limites et fonction
composée

Continuité

Fonctions continues
de référence

Continuité d'une
fonction composée

Théorème des
valeurs
intermédiaires

Théorème du point
fixe

Limites & Continuité d'une fonction

Terminale Spé

maths-mde.fr
Cours à imprimer pour élève

Lycée Evariste Galois

I. Limites

Définition

La limite d'une fonction f en $-\infty$ (resp. $+\infty$) est la valeur (si elle existe) vers laquelle se rapproche $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$ (resp. $+\infty$).

On la note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (resp. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$).

Cette limite, quand elle existe, peut être un nombre réel ou un infini.

Exemples

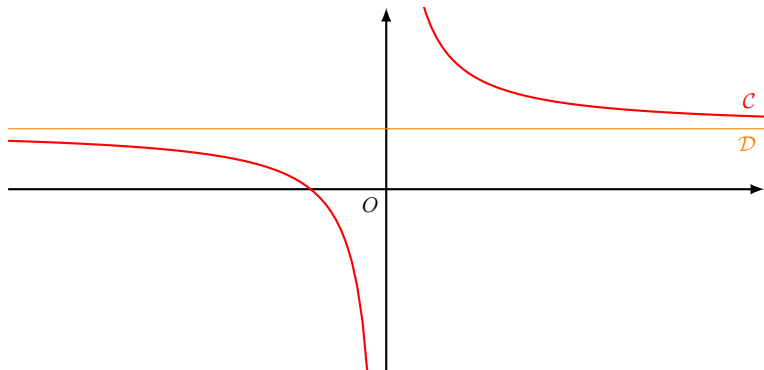
- ① $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ car plus x se rapproche de $-\infty$, plus $\frac{1}{x}$ se rapproche de 0.
- ② $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ car plus x devient grand, plus son carré le devient aussi.
- ③ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ car plus x se rapproche de $-\infty$, plus $\frac{1}{x^3}$ se rapproche de 0.
- ④ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ car plus x devient grand, plus sa racine carrée le devient aussi.

Asymptote horizontale

Définition

Soit a un réel. Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$ (resp. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$) alors la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f se rapproche de la droite d'équation $y = a$ en $-\infty$ (resp. $+\infty$).

Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $y = a$ est une *asymptote horizontale* de $\mathcal{C}$.



Ici, $\mathcal{D}$ est une asymptote horizontale de $\mathcal{C}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Définition

Soit a un réel fini. La limite d'une fonction f en a est la valeur vers laquelle $f(x)$ se rapproche quand x se rapproche de a . On la note $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Remarque

Il se peut que, lorsque x se rapproche de a tout en lui étant inférieur, la limite soit différente du cas où x se rapproche de a en lui étant supérieur. On écrit alors :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x).$$

Exemples

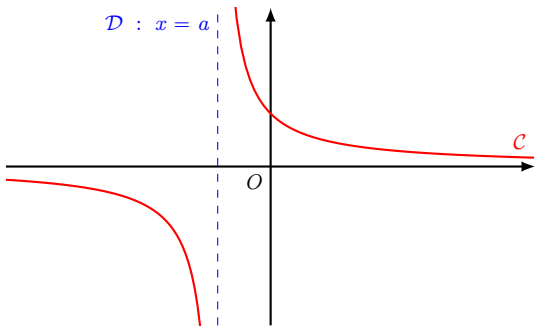
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Asymptote verticale

Définition

Soit a un réel. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) alors la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f se rapproche de la droite d'équation $x = a$.

Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** de $\mathcal{C}$.



Ici, $\mathcal{D}$ est une asymptote verticale de $\mathcal{C}$ en a .

Propriétés

Soit n un entier naturel non nul.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty.$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty.$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{pour } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}.$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{pour } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}.$

Exemples

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty.$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^3} = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^5} = -\infty.$

Propriétés

On note ℓ la limite de la fonction f et ℓ' la limite de la fonction g .

Limite d'une somme

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f + g)$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$
ℓ	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Limite d'un produit

$\lim f$	$\lim g$	$\lim fg$
ℓ	ℓ'	$\ell\ell'$
$\ell \neq 0$	∞	∞
∞	∞	∞
0	∞	F.I.

Limite d'un quotient

$\lim f$	$\lim g$	$\lim \frac{f}{g}$
ℓ	$\ell' \neq 0$	ℓ/ℓ'
$\ell \neq 0$	0	∞
ℓ	∞	0
0	0	F.I.
∞	∞	F.I.

Exemples

- On considère la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 + e^x$.

On sait que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Ainsi, par somme de limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

- On considère la fonction g définie par $g(x) = -xe^x$.

On sait que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

Ainsi, par produit de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

Théorème de comparaison

On considère deux fonctions f et g . Soit a une valeur ou une borne (finie ou infinie) de $D_f \cap D_g$.

- Si $\lim_{x \rightarrow +a} f(x) = +\infty$ et s'il existe un réel A tel que, pour $x \geq A$,
 $f(x) \leq g(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow +a} f(x) = -\infty$ et s'il existe un réel A tel que, pour $x \geq A$,
 $f(x) \geq g(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$.

Exemples

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 2\cos(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos(x) \leq 1 & \Leftrightarrow -2 \leq 2\cos(x) \leq 2 \\ & \Leftrightarrow -2 + x \leq x + 2\cos(x) \leq x + 2. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq x + 2$. Or, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2) = -\infty$. Donc, selon le théorème de comparaison, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Limites

Limite aux infinis

Asymptote
horizontale

Limite en un point
fini

Asymptote verticale

Limites des
fonctions usuelles

Opérations sur les
limites

Théorème de
comparaison

**Théorème des
gendarmes**

Limites et fonction
composée

Continuité

Fonctions continues
de référence

Continuité d'une
fonction composée

Théorème des
valeurs
intermédiaires

Théorème du point
fixe

Théorème des gendarmes

Soit f , g et h trois fonctions définies sur un intervalle I telles que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Si, pour tout réel ℓ , on a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell.$$

Exemples

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$-\frac{1}{x} \leq \sin(x) \leq \frac{1}{x}.$$

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, ainsi selon le théorème des gendarmes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Propriété

Soient u et v deux fonctions. On définit la fonction f par $f(x) = u[v(x)]$. Alors,

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{X \rightarrow y} u(X) \quad \text{où } y = \lim_{x \rightarrow \alpha} v(x),$$

α pouvant représenter un nombre fini ou un infini.

Remarque

On peut aussi noter :

$$f(x) = u[v(x)] = (u \circ v)(x)$$

(lire « u rond v »). On dit que f est une *fonction composée*.

Exemples

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

On a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{array} \right\} \text{ ainsi, par composition de limites, on } \\ \text{obtient : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

II. Continuité

Définition

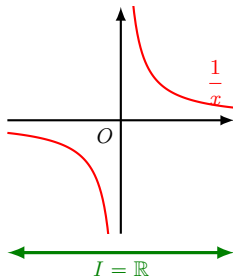
Soit une fonction f définie sur un intervalle I et $a \in I$.

On dit que f est *continue* en a si : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

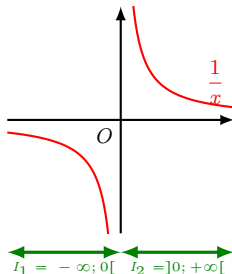
On dit que f est *continue* sur I si f est continue en tout point de I .

Exemples

La courbe représentative de la fonction inverse n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (car ses limites en 0 sont infinies). En revanche, elle l'est sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.



Il y a un « trou » au niveau de $x = 0$ donc la fonction n'est pas continue en 0, donc pas continue sur $\mathbb{R}$.



Il n'y a pas de trou sur chaque intervalle I_1 et I_2 donc la fonction est continue sur I_1 et sur I_2 .

Propriétés

- Les fonctions *polynômes* sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions *rationnelles* sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
- La fonction *racine carrée* est continue sur $[0 ; +\infty[$.
- La fonction *exponentielle* est continue sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions obtenues par somme, produit ou quotient de fonctions continues sont continues sur chacun des intervalles où elles sont définies.

Exemples

- ① La fonction $x \mapsto x^3 + 2x - 5$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.
- ② La fonction $x \mapsto \sin(x) + \cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
- ③ La fonction $x \mapsto (x^2 + 1) \cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
- ④ La fonction $x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ est continue sur $] -\infty ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$ comme fonction rationnelle définie sur ces deux intervalles.

Propriétés

Soit $f = v \circ u$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Si u est continue sur I et si v est continue sur $u(I)$ alors f est continue sur I .

Exemples

Soient $u : x \mapsto x - 1$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$. Notons $f(x) = (v \circ u)(x) = \sqrt{x - 1}$.

u est continue sur $\mathbb{R}$ mais f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ car $x - 1 < 0$ pour

$x < 1$. Ainsi, f est définie sur $I = [1 ; +\infty[$, et elle est continue sur I car u est continue sur I et v est continue sur $u(I) = [0 ; +\infty[$.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I , et soient a et b deux réels de I . Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution comprise entre a et b .

Théorème des bijection

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et soient a et b deux réels de I tels que $a < b$.

Si f est continue et strictement monotone sur $[a ; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans l'intervalle $[a ; b]$.

Exemples

- Soit $f(x) = \cos x - x$. Alors, $f'(x) = -\sin x - 1 < 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est strictement décroissante. f est aussi continue sur $\mathbb{R}$ comme la somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

De plus,

- $f(0) = \cos 0 - 0 = 1 > 0$
- $f(\pi) = \cos \pi - \pi = -\pi < 0$

donc $0 \in]f(\pi) ; f(0)[$. Ainsi, d'après le théorème de bijection,

l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0 ; \pi]$.

- L'équation $x^3 = 243$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ car la fonction cube $x \mapsto x^3$ est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$ et 243 est compris entre $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$.

Limites

Limite aux infinis

Asymptote
horizontale

Limite en un point
fini

Asymptote verticale

Limites des
fonctions usuelles

Opérations sur les
limites

Théorème de
comparaison

Théorème des
gendarmes

Limites et fonction
composée

Continuité

Fonctions continues
de référence

Continuité d'une
fonction composée

Théorème des
valeurs
intermédiaires

Théorème du point
fixe

Théorème du point fixe

Soit une suite (u_n) définie par un premier terme et $u_{n+1} = f(u_n)$ convergente vers ℓ .

Si la fonction associée f est continue en ℓ , alors la limite de la suite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Démonstration

La suite (u_n) est convergente vers ℓ . Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

De plus, la fonction f est continue en ℓ . Donc, $\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = f(\ell)$.

Par composition, on en déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$. Donc, $f(\ell) = \ell$.

D'où le résultat.