

Exercice 1 : (9 points)

Soit n un entier naturel non nul. Dans le cadre d'une expérience aléatoire, on considère une suite d'événements A_n et on note p_n la probabilité de l'événement A_n .

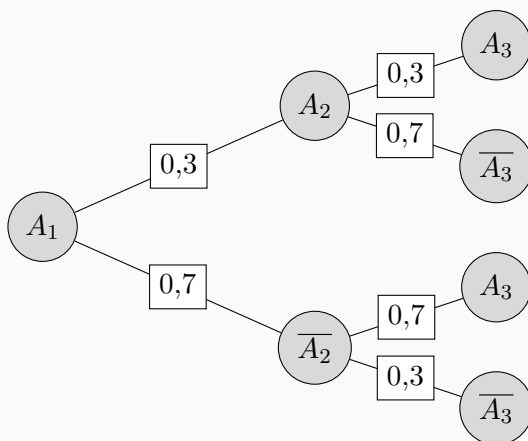
Pour les parties **A** et **B** de l'exercice, on considère que :

- Si l'événement A_n est réalisé alors l'événement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,3.
- Si l'événement A_n n'est pas réalisé alors l'événement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,7.

On suppose que $p_1 = 1$.

Partie A :

- 1 Ci-après l'arbre des probabilités complété :



- 2 A_2 et $\overline{A_2}$ forment une partition de l'univers car $\Omega = A_2 \cup \overline{A_2}$. Ainsi, selon la formule des probabilités totales, on a :

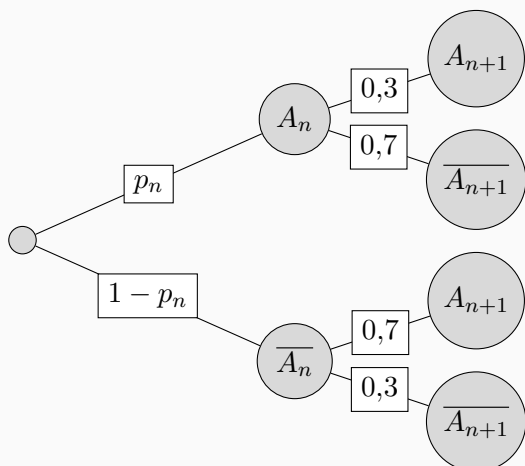
$$\begin{aligned} P(A_3) &= P(A_2 \cap A_3) + P(\overline{A_2} \cap A_3) \\ &= P(A_2) \times P_{A_2}(A_3) + P(\overline{A_2}) \times P_{\overline{A_2}}(A_3) \\ &= 0,3 \times 0,3 + 0,7 \times 0,7 \\ &= 0,58. \end{aligned}$$

- 3 Par définition de la probabilité conditionnelle, on a :

$$\begin{aligned} P_{A_3}(A_2) &= \frac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} \\ &= \frac{0,3 \times 0,3}{0,58} \\ &\approx 0,16. \end{aligned}$$

Partie B : Dans cette partie, on étudie la suite (p_n) avec $n \geq 1$.

- 1 Ci-après l'arbre des probabilités complété :



2 A_n et $\overline{A_n}$ forment une partition de l'univers. Ainsi, selon la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
 p_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\
 &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) \\
 &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\
 &= p_n \times 0,3 + (1 - p_n) \times 0,7 \\
 &= 0,3p_n + 0,7 - 0,7p_n \\
 &= -0,4p_n + 0,7.
 \end{aligned}$$

On considère la suite (u_n) , définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,5$. Soit, $p_n = u_n + 0,5$.

3 Pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= p_{n+1} - 0,5 = -0,4p_n + 0,7 - 0,5 \\
 &= -0,4(u_n + 0,5) + 0,2 \\
 &= -0,4u_n - 0,2 + 0,2 \\
 &= -0,4u_n.
 \end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est une suite géométrique de raison $q = -0,4$ et de premier terme $u_1 = p_1 - 0,5 = 0,5$.

4 Pour tout entier naturel non nul n , on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0,5 \times (-0,4)^{n-1}$.

Ainsi, $p_n = u_n + 0,5 = 0,5 \times (-0,4)^{n-1} + 0,5$.

5 On a : $-1 < -0,4 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-0,4)^{n-1} = 0$.

Ainsi, par produit et sommes de limites, on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,5$.

Partie C :

1 La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$P(\overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = 0,7 \times 0,3 = 0,21$	$1 - (0,21 + 0,09) = 0,7$	$P(A_2 \cap A_3) = 0,3 \times 0,3 = 0,09$.

2 L'espérance de X :

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{i=0}^2 x_i P(X = x_i) \\
 &= 0 \times 0,21 + 1 \times 0,7 + 2 \times 0,09 \\
 &= 0,88
 \end{aligned}$$

Variance de X :

$$\begin{aligned}
 V(X) &= \sum_{i=0}^2 (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) \\
 &= (0 - 0,88)^2 \times 0,21 + (1 - 0,88)^2 \times 0,7 + (2 - 0,88)^2 \times 0,09 \\
 &= 0,2856.
 \end{aligned}$$

Exercice 2 : (8 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

1 On a : $u_1 = \frac{2u_0 + 1}{u_0 + 2} = \frac{2 \times 2 + 1}{2 + 2} = \frac{5}{4} = 1,25$.

2 (a) On a : $a_0 = \frac{u_0}{u_0 - 1} = \frac{2}{2 - 1} = 2$ et $a_1 = \frac{u_1}{u_1 - 1} = \frac{1,25}{1,25 - 1} = \frac{1,25}{0,25} = 5$.

(b) **Première méthode**

Pour tout entier naturel n , on a d'une part :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - 1} = \frac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - \frac{u_n + 2}{u_n + 2}} \\ &= \frac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\frac{2u_n + 1 - u_n - 2}{u_n + 2}} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} \times \frac{u_n + 2}{u_n - 1} \\ &= \frac{2u_n + 1}{u_n - 1} \end{aligned}$$

et, d'autre part : $3a_n - 1 = 3 \times \frac{u_n}{u_n - 1} - 1 = \frac{3u_n}{u_n - 1} - \frac{u_n - 1}{u_n - 1} = \frac{3u_n - (u_n - 1)}{u_n - 1}$
 $= \frac{2u_n + 1}{u_n - 1}.$

On constate bel et bien que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

Deuxième méthode

Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1} \\ &= \frac{u_{n+1} - 1 + 1}{u_{n+1} - 1} = 1 + \frac{1}{u_{n+1} - 1} \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - 1} \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - \frac{u_n + 2}{u_n + 2}} \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{u_n - 1}{u_n + 2}} \\ &= 1 + \frac{u_n + 2}{u_n - 1} \\ &= 2 + \frac{u_n + 2}{u_n - 1} - 1 \\ &= \frac{2(u_n - 1) + u_n + 2}{u_n - 1} - 1 \\ &= \frac{2u_n - 2 + u_n + 2}{u_n - 1} - 1 \\ &= \frac{3u_n}{u_n - 1} - 1 \\ &= 3 \frac{u_n}{u_n - 1} - 1 \\ &= 3a_n - 1. \end{aligned}$$

(c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on considère la propriété $\mathcal{P}(n)$: $a_n \geq 3n - 1$.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $a_1 = 5$ et $5 \geq 3 \times 1 - 1 = 2$. Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vérifiée, autrement dit $a_{n+1} \geq 3(n + 1) - 1$.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned}
 a_n &\geq 3n - 1 \\
 3a_n &\geq 3(3n - 1) \quad \text{car, } 3 > 0 \\
 3a_n - 1 &\geq 9n - 3 - 1 \\
 a_{n+1} &\geq 9n - 4 \quad \text{car, } 3a_n - 1 = a_{n+1} \\
 a_{n+1} &\geq 3n + 6n + 3 - 7 \\
 a_{n+1} &\geq 3(n + 1) + 6n - 7 \\
 a_{n+1} &\geq 3(n + 1) - 1 + 6n - 6 \\
 a_{n+1} &\geq 3(n + 1) - 1 + 6(n - 1).
 \end{aligned}$$

Or, $6(n - 1) \geq 0$, donc $a_{n+1} \geq 3(n + 1) - 1$. Ainsi, l'hérédité est vérifiée.

Conclusion : Selon le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier naturel non nul n , $a_n \geq 3n - 1$.

- (d) $3 > 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n - 1 = +\infty$.

Ainsi, selon le théorème de comparaison, la suite (a_n) diverge vers $+\infty$.

- 3 a Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{u_n}{u_n - 1} \\
 a_n \times (u_n - 1) &= u_n \quad \text{car } u_n - 1 \neq 0 \\
 a_n \times u_n - a_n - u_n &= 0 \\
 (a_n - 1) \times u_n - a_n &= 0 \\
 (a_n - 1) \times u_n &= a_n \\
 u_n &= \frac{a_n}{a_n - 1}, \quad \text{où } a_n \neq 1.
 \end{aligned}$$

En effet, $a_0 = 2$ et pour n entier naturel non nul, on a $a_n \geq 3n - 1 > 1$.

- b Pour tout n naturel, on a : $u_n = \frac{a_n}{a_n - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{a_n}}$.

Or, (a_n) diverge vers $+\infty$, donc par limite du quotient et limite de la somme, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{a_n} = 1.$$

Enfin, par quotient, on déduit le résultat : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{a_n}} = 1$.

Autrement dit, la suite (u_n) converge vers 1.

- 4 a Cette fonction python initialise la variable u à 2 et la variable n à 0.

La boucle `while` s'exécute tant que l'écart entre la variable u et la limite 1 est strictement supérieur à la valeur p .

Les valeurs n et u renvoyées par la fonction `algo(p)` correspondent donc respectivement à l'indice et à la valeur du premier terme de la suite pour lequel l'écart entre le terme et la limite de la suite est inférieur ou égal à la valeur p choisie.

```
def algo(p):
    u=2
    n=0
    while u-1>p:
        u=(2*u+1)/(u+2)
        n=n+1
    return (n,u)
```

- b En utilisant la calculatrice, on constate que la valeur de n pour $p = 0,001$ est 6.

On peut également programmer la fonction sous python ou la calculatrice. Dans ce cas là, `algo(0.001)`, renvoie (6, 1.000914913083257).

Exercice 3 : (3 points)

- 1** On considère les points $A(1; 0; 3)$ et $B(4; 1; 0)$.

On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$M(x; y; z) \in (AB)$ si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, autrement dit,

$$\begin{cases} x - 1 = 3t \\ y - 0 = 1t \\ z - 3 = -3t. \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est alors donnée par :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = t \\ z = 3 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Il s'agit donc de la réponse **c**.

- 2** On considère la droite (d) de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 6t \\ z = 4 - 2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Par substitution, on constate que les coordonnées du point D vérifient le système ci-dessus. En effet,

$$\begin{cases} -3 = 3 + 4t \\ -9 = 6t \\ 7 = 4 - 2t \end{cases} \quad \text{implique que } t = -\frac{3}{2}. \text{ Il s'agit donc de la réponse } \mathbf{d}.$$

- 3** • Les deux droites (d) et (d') ont respectivement pour vecteurs $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ces vecteurs sont colinéaires si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{u} = t\overrightarrow{v}$, autrement dit,

$$\begin{cases} 4 = 3t \\ 6 = -2t \\ -2 = t \end{cases} \quad \text{Ceci implique que } \begin{cases} \frac{4}{3} = t \\ -3 = t \\ -2 = t \end{cases}, \text{ c'est absurde.}$$

En conséquence, (d) et (d') ne sont pas parallèles.

- Les deux droites sont sécantes si et seulement si il existe deux réels t et k tels que :

$$\begin{cases} 3 + 4t = -2 + 3k \\ 6t = -1 - 2k \\ 4 - 2t = 1 + k \end{cases} \quad \text{autrement dit } \begin{cases} 4t = 3k - 5 & L_1 \\ 6t = -2k - 1 & L_2 \\ -2t = k - 3 & L_3 \end{cases}.$$

La combinaison linéaire $L_1 - L_2$ implique $-2t = 5k - 4$.

Par substitution dans L_3 , on obtient : $5k - 4 = k - 3$, soit $k = \frac{1}{4}$ et donc $t = \frac{11}{8}$.

Et par substitution dans L_1 , on obtient : $4t = 3k - 5 = \frac{3}{4} - 5 = -\frac{17}{4}$, d'où $t = -\frac{17}{8}$, c'est impossible.

Ce système n'admet pas de solutions donc les deux droites ne sont pas sécantes.

- Les deux droites ne sont pas confondues non plus. Il s'agit donc de la réponse **b**.