Devoir Surveillé n° 2
Terminale Spécialité

Durée **1 h** | Calculatrice **autorisée** | Barème 20 **pts**

Consignes. Toute réponse doit être justifiée. Les résultats sont à encadrer. La présentation et la rédaction sont prises en compte dans la notation.

Note / 20

Nom, prénom _____

Classe _____ Date _____

Exercice 1 • Suites numériques (10 pts)

Partie A : On considère la fonction f définie sur $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$ par : $f(x)=\dfrac{x-2}{2x-3}$.

1. Justifier tous les éléments du tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$
f	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

2. En déduire que pour tout $x\in[0;1]$, on a : $f(x)\in[0;1]$.

Partie B : On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases}u_0=0\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n-2}{2u_n-3}\end{cases}$, pour tout entier naturel n.

1. En utilisant la fonction f, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. On note ℓ la limite de la suite (u_n). En admettant que ℓ est solution de l'équation $f(x)=x$ sur l'intervalle $[0;1]$, montrer que $\ell=1$.

4. On donne ci-dessous une fonction `seuil` écrite en langage Python.

```
def seuil(h):
    n = 0
    u = 0
    while u < 1-h:
        n = n+1
        u = (u-2)/(2*u-3)
    return n
```

L'appel `seuil(0.0001)` renvoie la valeur 5 000. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

5. (a) Donner les quatre premiers termes de la suite (u_n) sous forme de fractions irréductibles.
(b) Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n et démontrer cette conjecture.

Exercice 2 • Probabilité conditionnelle (10 pts)

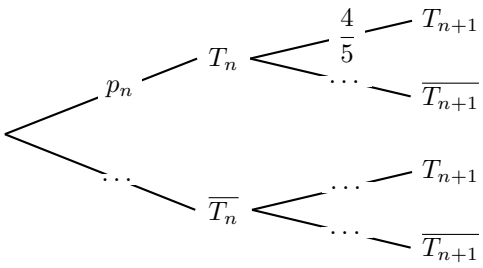
Un tireur à l'arc s'entraîne sur une cible dans le but d'atteindre son centre. On modélise la situation de la façon suivante :

- au premier tir, il atteint le centre de la cible avec une probabilité de $\frac{1}{2}$;
- pour les tirs suivants :
  - lorsqu'il a atteint le centre de la cible au tir précédent, la probabilité qu'il atteigne à nouveau le centre de la cible est $\frac{4}{5}$;
  - lorsqu'il n'a pas atteint le centre de la cible au tir précédent, la probabilité qu'il atteigne le centre de la cible est $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'événement T_n : « Le tireur atteint le centre de la cible au n-ième tir ».
On note $p_n = P(T_n)$ la probabilité que l'évènement T_n se réalise.

1. Donner la valeur de p_1 et montrer que $p_2 = \frac{17}{30}$.

2. Recopier sur la copie l'arbre de probabilité suivant et compléter les pointillés avec les probabilités qui conviennent :



3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$p_{n+1} = \frac{7}{15}p_n + \frac{1}{3}$$

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = p_n - \frac{5}{8}$$

(a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{7}{15}$.
(b) Déterminer une expression de u_n en fonction de n.
(c) En déduire une expression de p_n en fonction de n.

5. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

6. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $p_n \geqslant 0,6$.