Corrigé : Devoir Surveillé n° 2
Terminale Spécialité

Barème 20 **pts**

Exercice 1 • Suites numériques (10 pts)

Partie A : On considère la fonction f définie sur $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$ par : $f(x)=\dfrac{x-2}{2x-3}$.

1. Justification de tous les éléments du tableau de variation :

▶ **Dérivée et sens de variation :** La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition comme quotient de fonctions dérivables (le dénominateur ne s'annulant pas sur $]-\infty;\frac{3}{2}[$).
Posons :

$$\begin{array}{ll} u(x)=x-2 & et \quad v(x)=2x-3 \\ u'(x)=1 & v'(x)=2. \end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{1\times(2x-3)-2\times(x-2)}{(2x-3)^2} \\ &= \frac{2x-3-2x+4}{(2x-3)^2} \\ &= \frac{1}{(2x-3)^2}. \end{aligned}$$

Or, pour tout $x\neq\frac{3}{2}$, $(2x-3)^2>0$, donc $f'(x)>0$. La fonction f est alors **strictement croissante** sur l'intervalle $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$.

▶ **Limites : faculatives dans ce contrôle.**

— En $-\infty$: On a une forme indéterminée. En factorisant par x avec $x\neq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{2x-3} &= \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\left(2-\frac{3}{x}\right)} \\ &= \frac{1-\frac{2}{x}}{2-\frac{3}{x}}. \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$. Donc, par produit et somme de limites, on obtient :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} 1-\dfrac{2}{x}=1 \\ \lim_{x\to-\infty} 2-\dfrac{3}{x}=2. \end{cases}$$

Enfin, par quotient : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-2}{2x-3}=\frac{1}{2}$.

— En $\left(\frac{3}{2}\right)^-$: On étudie séparément le numérateur et le dénominateur lorsque $x\to\dfrac{3}{2}^-$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\frac{3}{2}^-}(x-2) &= \frac{3}{2}-2 \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, le numérateur tend vers un réel strictement négatif. De plus,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{3}{2}^-}(2x-3) &= 2\times\frac{3}{2}-3\\ &= 0.\end{aligned}$$

Par ailleurs, $x<\dfrac{3}{2}$, donc,

$$\begin{aligned}2x &< 3\\ 2x-3 &< 0.\end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $x\to\dfrac{3}{2}^-$, le dénominateur tend vers 0 par valeurs négatives, autrement dit,

$$2x-3\longrightarrow 0^-.$$

En conséquence, par qutient de limites on obtient :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{3}{2}^-}\frac{x-2}{2x-3} &= \frac{-\frac{1}{2}}{0^-}\\ &= +\infty.\end{aligned}$$

2. En déduire que pour tout $x\in[0;1]$, on a $f(x)\in[0;1]$.

- La fonction f est strictement croissante sur $[0;1]$ (qui est inclus dans $]-\infty;\frac{3}{2}[$).
- Calculons les images des bornes de l'intervalle :

$$f(0)=\frac{0-2}{2(0)-3}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$$

$$f(1)=\frac{1-2}{2(1)-3}=\frac{-1}{-1}=1$$

- Par ailleurs, f est croissante sur $[0;1]$, donc pour tout $x\in[0;1]$, on a :

$$f(0)\leqslant f(x)\leqslant f(1)$$

soit,

$$\frac{2}{3}\leqslant f(x)\leqslant 1.$$

Comme l'intervalle $\left[\frac{2}{3};1\right]$ est inclus dans $[0;1]$, on en déduit que pour tout $x\in[0;1]$, $f(x)\in[0;1]$.

Partie B : On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$: $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$.

- **Initialisation :** Pour $n=0$: $u_0=0$ et $u_1=f(0)=\frac{2}{3}$. On a bien $0\leqslant 0\leqslant\frac{2}{3}\leqslant 1$, soit $0\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant 1$. La propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang 0.
- **Hérédité :** Soit n un entier naturel fixé pour lequel $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée et montrons qu'elle est également au rang $n+1$, autrement dit, $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 1$.
  Selon l'hypothèse de récurrence, $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$.
  Or, la fonction f est croissante sur $[0;1]$, donc :

$$f(0)\leqslant f(u_n)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(1).$$

Soit,

$$0<\frac{2}{3}\leqslant f(u_n)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(1).$$

Autrement dit, $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 1$.
La proposition $\mathcal{P}(n)$ est alors héréditaire.

- **Conclusion :** La proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce dernier rang. Selon le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

2. D'après la question précédente, la suite (u_n) est **croissante** ($u_n \leqslant u_{n+1}$) et **majorée** par 1. Ainsi, selon le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) **converge** vers une limite ℓ.

3. La limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ sur $[0;1]$. Dès lors, pour tout $x \in [0;1]$,

$$\begin{aligned}
\frac{x-2}{2x-3} = x &\iff x - 2 = x(2x-3) \\
&\iff x - 2 = 2x^2 - 3x \\
&\iff 2x^2 - 4x + 2 = 0 \\
&\iff x^2 - 2x + 1 = 0 \\
&\iff (x-1)^2 = 0 \\
&\iff x = 1.
\end{aligned}$$

Or, pour tout n, $u_n \in [0;1]$, donc la limite ℓ appartient à $[0;1]$. La seule solution est donc $\ell = 1$.

4. Avec ce script, `seuil(0.0001)` renvoie 5000.
Cela signifie que **5000 est le plus petit rang n à partir duquel la distance entre u_n et la limite 1 est inférieure à** 0,0001 (soit $u_n \geq 0{,}9999$).

5. (a) Ci-après les quatre premiers termes sous forme de fractions irréductibles :

$$u_0 = 0.$$
$$u_1 = \frac{2}{3}.$$
$$u_2 = \frac{\frac{2}{3} - 2}{2\left(\frac{2}{3}\right) - 3} = \frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{5}{3}} = \mathbf{\frac{4}{5}}.$$
$$u_3 = \frac{\frac{4}{5} - 2}{2\left(\frac{4}{5}\right) - 3} = \frac{-\frac{6}{5}}{-\frac{7}{5}} = \mathbf{\frac{6}{7}}.$$

(b) **Conjecture et démonstration de l'expression de u_n :**

- En utilisant la question précédente, on peut conjecturer le résultat suivant. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2n}{2n+1}$.
- **Démontrons cette conjecture par récurrence.**
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$: $u_n = \dfrac{2n}{2n+1}$.
  - *Initialisation :* Pour $n = 0$, $\frac{2(0)}{2(0)+1} = 0 = u_0$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
  - *Hérédité :* Soit n un entier naturel fixé pour lequel $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée et montrons qu'elle l'est aussi pour le rang $n+1$.
    En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

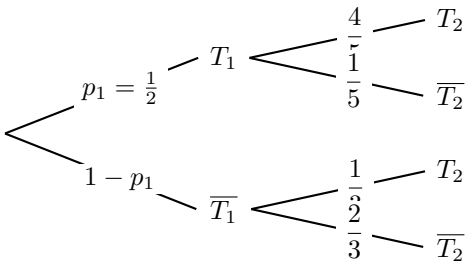
$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{u_n - 2}{2u_n - 3} = \frac{\frac{2n}{2n+1} - 2}{2\left(\frac{2n}{2n+1}\right) - 3} \\
&= \frac{\frac{2n-2(2n+1)}{2n+1}}{\frac{4n-3(2n+1)}{2n+1}} \\
&= \frac{-2n-2}{-2n-3} \\
&= \frac{2n+2}{2n+3} \\
&= \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1}.
\end{aligned}$$

    La proposition est alors héréditaire.

▶ **Conclusion :** La proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce dernier rang. Selon le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2n}{2n+1}$.

Exercice 2 • Probabilité conditionnelle (10 pts)

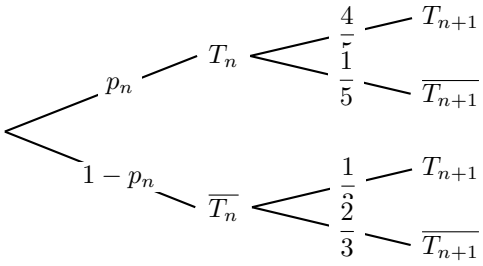
1. Ci-après l'arbre de probabilité :



On a $p_1 = \dfrac{1}{2}$. De plus, T_1 et $\overline{T_1}$ forment une partition de l'univers. En utilisant la formule des probabilités totales, on obtient :

$$\begin{aligned} p_2 &= P(T_2) \\ &= P(T_1 \cap T_2) + P(\overline{T_1} \cap T_2) \\ &= P(T_1) \times P_{T_1}(T_2) + P(\overline{T_1}) \times P_{\overline{T_1}}(T_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{17}{30}. \end{aligned}$$

2. Arbre de probabilité complété :



3. T_n et $\overline{T_n}$ forment une partition de l'univers. Ainsi, selon la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(T_{n+1}) \\ &= P(T_n \cap T_{n+1}) + P(\overline{T_n} \cap T_{n+1}) \\ &= P(T_n) \times P_{T_n}(T_{n+1}) + P(\overline{T_n}) \times P_{\overline{T_n}}(T_{n+1}) \\ &= \frac{4}{5}p_n + \frac{1}{3}(1 - p_n) \\ &= \mathbf{\frac{7}{15}p_n + \frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

4. Étude de la suite (u_n) avec $u_n = p_n - \dfrac{5}{8}$:

(a) Pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{5}{8} \\ &= \frac{7}{15}p_n + \frac{1}{3} - \frac{5}{8} \\ &= \frac{7}{15}p_n - \frac{7}{24} \\ &= \frac{7}{15}\left(p_n - \frac{\frac{7}{24}}{\frac{7}{15}}\right) \\ &= \frac{7}{15}\left(p_n - \frac{5}{8}\right) \\ &= u_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est géométrique de raison $q = \mathbf{\frac{7}{15}}$ et de premier term $u_1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{8} = -\frac{1}{8}$.

(b) Pour tout $n \in \mathsf{N}^*$, on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$, soit $u_n = -\mathbf{\frac{1}{8}}\left(\mathbf{\frac{7}{15}}\right)^{\mathbf{n-1}}$.

(c) On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - \frac{5}{8}$.

Ainsi, $p_n = \mathbf{\frac{5}{8}} + u_n$, soit $p_n = \mathbf{\frac{5}{8}} - \mathbf{\frac{1}{8}}\left(\mathbf{\frac{7}{15}}\right)^{\mathbf{n-1}}$.

5. $-1 < \frac{7}{15} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{15}\right)^n = 0$. Par produit et somme de limites, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \mathbf{\frac{5}{8}} = 0{,}625.$$

Ceci signifie, qu'à long terme, avec un grand nombre de tirs, la probabilité d'atteindre le centre se stablisera autour de 62,5%.

6. En utilisant la calculatrice, on obtient $n \geqslant 4$.