Corrigé : Devoir Surveillé n° 1
Terminale Spécialité

Durée **35 min** | Calculatrice **autorisée** | Barème 10 **pts**

Exercice 1 (1 pt)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n^2 + 4n - 5$. L'expression du terme u_{n+1} en fonction de n est alors donnée par :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3(n+1)^2 + 4(n+1) - 5 \\ &= 3(n^2 + 2n + 1) + 4n + 4 - 5 \\ &= 3n^2 + 6n + 3 + 4n + 4 - 5 \\ &= 3n^2 + 10n + 2. \end{aligned}$$

Exercice 2 (1 pt)

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_1 = 2$ et $v_{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1} \times v_n$. Dès lors,

$$v_2 = \frac{1+2}{1+1} \times v_1 = \frac{3}{2} \times 2 = 3$$

et

$$v_3 = \frac{2+2}{2+1} \times v_2 = \frac{4}{3} \times 3 = 4.$$

Ainsi,

$$\boxed{v_3 = 4}.$$

Exercice 3 (1 pt)

(u_n) est une suite arithmétique de raison r, ainsi $u_n = u_p + (n-p)r$ avec $n \geqslant p$ et $p, n \in \mathbb{N}$. Dès lors,

$$\begin{aligned} u_{17} = u_5 + (17-5)r &\Leftrightarrow 300 = 120 + 12r \\ &\Leftrightarrow 300 = 120 + 12r \\ &\Leftrightarrow r = \frac{300 - 120}{12} \\ &\Leftrightarrow r = 15. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{r = 15}.$$

Exercice 4 (1 pt)

(w_n) est une suite géométrique définie par $w_3 = 8$ et de raison $q = \dfrac{3}{4}$.
Ainsi, $w_n = w_p \times q^{n-p}$, pour tout $n \geqslant p$.
Dès lors,

$$\begin{aligned} w_n &= w_3 \times q^{n-3} \\ &= 8 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{w_n = 8\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}}.$$

Exercice 5 (1 pt)

(u_n) est une suite arithmétique de raison r, ainsi $u_n = u_p + (n-p)r$ avec $n \geqslant p$ et $p, n \in \mathbb{N}$.
Dès lors,

$$\begin{aligned} u_{15} = u_4 + (15-4)r &\Leftrightarrow 83 = 28 + 11r \\ &\Leftrightarrow r = \frac{83-28}{11} \\ &\Leftrightarrow r = 5. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$u_n = u_0 + nr$$

soit,

$$u_0 = u_n - nr.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} u_0 &= u_4 - 4 \times 5 \\ &= 28 - 20. \end{aligned}$$

En conséquence,

$$\boxed{u_0 = 8}.$$

Exercice 6 (1 pt)

(v_n) est une suite géométrique de raison q. Ainsi, $v_n = v_p \times q^{n-p}$, pour tout $n \geqslant p \geqslant 0$.
Dès lors,

$$\begin{aligned} v_4 &= v_2 \times q^{4-2} \\ 486 &= 6q^2 \\ q^2 &= \frac{486}{6} \\ q^2 &= 81. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$q = -9 \quad \text{ou} \quad q = 9.$$

Par ailleurs,

$$v_n = v_0 \times q^n$$

soit,

$$v_0 = \frac{v_n}{q^n}.$$

Ainsi,

$$v_0 = \frac{v_2}{q^2} = \frac{6}{81}.$$

En conséquence,

$$\boxed{v_0 = \frac{2}{27}.}$$

Exercice 7 (1 pt)

Posons :

$$S = 5 + 11 + 17 + 23 + \cdots + 653.$$

L'écart entre les termes consécutifs de la somme S est constant :

$$11 - 5 = 17 - 11 = 23 - 17 = 6.$$

Il s'agit donc d'une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 6.
Par ailleurs, le nombre de terme est donné par :

$$\frac{\text{dernier terme} - \text{1er terme}}{\text{raison}} = \frac{653 - 5}{6} = 108.$$

Comme le premier terme correspond au rang 0, le dernier terme correspond au rang 108. Il y a donc

$$108 + 1 = 109$$

termes.
Dès lors,

$$\begin{aligned} S &= 5+11+17+23+\cdots+653 \\ &= \sum_{k=0}^{108}(5+6k) \\ &= \sum_{k=0}^{108} u_k \quad \text{avec, } u_k = 5+6k \\ &= 109 \times \frac{u_0+u_{108}}{2} \\ &= 109 \times \frac{5+653}{2} \\ &= 109 \times 329 \\ &= 35861. \end{aligned}$$

En conséquence,

$$\boxed{5+11+17+23+\cdots+653 = 35861}.$$

Exercice 8 (1 pt)

(u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = 70 \times \left(\frac{4}{7}\right)^{n-1}.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} u_1+u_2+\cdots+u_{80} &= u_1 + u_1 \times \left(\frac{4}{7}\right)^1 + \cdots + u_1 \times \left(\frac{4}{7}\right)^{79} \\ &= u_1\left(1+\left(\frac{4}{7}\right)^1+\cdots+\left(\frac{4}{7}\right)^{79}\right) \\ &= 70 \times \frac{\left(\frac{4}{7}\right)^{80}-1}{\frac{4}{7}-1} \\ &= 70 \times \frac{-7}{3} \times \left[\left(\frac{4}{7}\right)^{80}-1\right] \\ &= -\frac{490}{3}\left[\left(\frac{4}{7}\right)^{80}-1\right]. \end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$$\boxed{u_1+u_2+\cdots+u_{80} = \frac{490}{3}\left[1-\left(\frac{4}{7}\right)^{80}\right]}.$$

Exercice 9 (1 pt)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}} \\ &= \frac{u_n + 2}{2u_n} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{u_n} \\ &= v_n + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}}$$

Autrement dit,

$$\boxed{(v_n) \text{ est arithmétique de raison } \frac{1}{2}}.$$

Exercice 10 (1 pt)

Pour tout entier naturel n, on considère la propriété $\mathcal{P}(n)$:

$$2 + 6 + 10 + \cdots + (4n + 2) = (n + 1)(2n + 2).$$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a :

$$\begin{cases} (0 + 1) \times (2 \times 0 + 2) = 2 \\ 4 \times 0 + 2 = 2. \end{cases}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel pour lequel la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n + 1)$ l'est aussi. Autrement dit,

$$2 + 6 + 10 + \cdots + (2n + 6) = (n + 2)(2(n + 1) + 2).$$

Soit, $2 + 6 + 10 + \cdots + (2n + 6) = (n + 2)(2n + 4)$.
Par hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned} 2 + 6 + 10 + \cdots + (4n + 2) + (4n + 6) &= (n + 1)(2n + 2) + 4n + 6 \\ &= 2n^2 + 2n + 2n + 2 + 4n + 6 \\ &= 2n^2 + 8n + 8 \\ &= 2[n^2 + 4n + 4] \\ &= 2(n + 2)^2 \\ &= (n + 2)(2n + 4). \end{aligned}$$

L'hérédité est donc vérifiée.

Conclusion : La propriété est vraie pour le rang $n = 0$ et héréditaire à partir de ce dernier rang. Ainsi, selon le principe de récurrence pour tout entier naturel n :

$$\boxed{2 + 6 + 10 + \cdots + (4n + 2) = (n + 2)(2n + 4)}.$$