Devoir maison n° 2

Terminale Spécialité

Travail personnel — à rendre rédigé sur copie

Calculatrice **autorisée** | À rendre le **jeudi 7 janvier** | Barème 15 **pts**

Consignes. Devoir à rendre sur copie double. Le soin, la rigueur des justifications et l'orthographe sont évalués. Tout plagiat entraîne la note N.N..

Note / 15

Nom, prénom _____

Classe _____ Date _____

Exercice 1 • Probabilité & Suites numériques (5 pts)

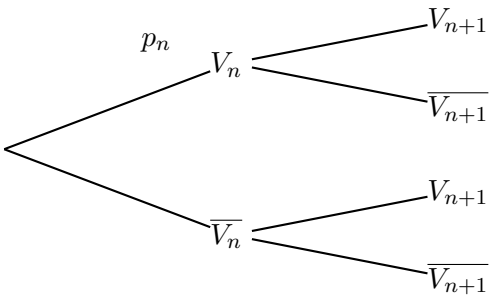
Un étudiant mange tous les jours au restaurant universitaire. Ce restaurant propose des plats végétariens et des plats non végétariens.

- Lorsqu'un jour donné l'étudiant a choisi un plat végétarien, la probabilité qu'il choisisse un plat végétarien le lendemain est $0,9$.
- Lorsqu'un jour donné l'étudiant a choisi un plat non végétarien, la probabilité qu'il choisisse un plat végétarien le lendemain est $0,7$.

Pour tout entier naturel n, on note V_n l'évènement « l'étudiant a choisi un plat végétarien le n^{e} jour » et p_n la probabilité de V_n.
Le jour de la rentrée, l'étudiant a choisi le plat végétarien. On a donc $p_1 = 1$.

1. (a) Indiquer la valeur de p_2.
(b) Montrer que $p_3 = 0,88$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
(c) Sachant que le 3^{e} jour l'étudiant a choisi un plat végétarien, quelle est la probabilité quil ait choisi un plat non végétarien le jour précédent ? On arrondira le résultat à 10^{-2}.

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. Justifier que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,7$.

4. On souhaite disposer de la liste des premiers termes de la suite (p_n) pour $n \geqslant 1$.
Pour cela, on utilise une fonction appelée `repas` programmée en langage Python dont on propose trois versions, indiquées ci-dessous.

Programme 1

```
1 def repas(n):
2   p=1
3   L=[p]
4   for k in range(1,n):
5     p = 0.2*p+0.7
6     L. append(p)
7    return(L)
```

Programme 2

```
1 def repas(n):
2   p=1
3   L=[p]
4   for k in range(1,n+1):
5     p = 0.2*p+0.7
6     L. append(p)
7   return(L)
```

Programme 3

```
1 def repas(n):
2   p=1
3   L=[p]
4   for k in range(1,n):
5     p = 0.2*p+0.7
6     L.append(p+1)
7   return(L)
```

(a) Lequel de ces programmes permet d'afficher les n premiers termes de la suite (p_n) ? Aucune justification n'est attendue.

(b) Avec le programme choisi à la question **a.** donner le résultat affiché pour $n = 5$.

5. Démontrer par récurrence que, pour tout naturel $n \geqslant 1$, $p_n = 0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875$.

6. En déduire la limite de la suite (p_n).

Exercice 2 • Suites numériiques & Python (5 pts)

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1 &= \dfrac{1}{e} \\ u_{n+1} &= \dfrac{1}{e}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) u_n \text{ pour tout entier } n \geqslant 1. \end{cases}$

1. Calculer les valeurs exactes de u_2 et u_3. On détaillera les calculs.

2. On considère une fonction écrite en langage Python qui, pour un entier naturel n donné, affiche le terme u_n. Compléter les lignes L_2 et L_4 de ce programme.

L_1	`def suite(n):`
L_2	`.....`
L_3	`for i in range(1, n):`
L_4	`u=.....`
L_5	`return u`

3. On admet que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs.

(a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $1 + \dfrac{1}{n} \leqslant e$.

(b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

(c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier votre réponse.

4. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul, on a : $u_n = \dfrac{n}{e^n}$.

(b) En déduire, si elle existe, la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 • Fonction exponentielle (5 pts)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse.

1. **Affirmation 1** : Pour tout réel x : $1 - \dfrac{1-\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}} = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.
2. On considère la fonction$g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}$.

   Affirmation 2 : L'équation $g(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

   Affirmation 3 : L'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathcal{C}$ en un seul point.
4. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^{x}\left(1-x^2\right)$.

   Affirmation 4 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction h n'admet pas de point d'inflexion.
5. **Affirmation 5 :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+x} = 0$.
6. **Affirmation 6 :** Pour tout réel x, $1+\mathrm{e}^{2x} \geqslant 2\mathrm{e}^{x}$.