



1 Espérance d'une variable aléatoire discrète

Définition

Le tableau ci-dessous représente la loi de probabilité d'une variable aléatoire X .

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

L'espérance de X est le nombre : $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$.

Exemple : Dans un jeu, on lance un dé équilibré. Le joueur :

- gagne 5 points si le 6 sort ;
- gagne 1 point si le 3, le 4 ou le 5 sort ;
- perd 5 points si le 1 ou le 2 sort.

On note G le gain (nombre de point) à chaque lancer : il peut être positif ou négatif.

$\{G = 5\}$ correspond à l'événement « Le joueur gagne 5 points » dont la probabilité est $\frac{1}{6}$.

Calculer $P(\{G = 1\})$ et $P(\{G = -5\})$.

.....

Le gain moyen « espéré » est appelé « espérance de G ». On la note $E(G)$.

$$\begin{aligned} E(G) &= 5 \times P(G = 5) + 1 \times P(G = 1) + (-5) \times P(G = -5) \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

2 Loi binomiale

Définition

La répétition de façon identique et indépendante de n épreuves de Bernoulli de paramètre p donne un schéma de Bernoulli de paramètres n et p .

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès obtenus suit alors la loi binomiale de paramètres n et p .

Propriété

Soit une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres n et p .

L'espérance mathématique de X , notée $E(X)$, vérifie : $E(X) = n \times p$.

Exemple : Un magasin propose à ses clients sa nouvelle carte de fidélité. On suppose que la probabilité qu'un client l'accepte est de 0,4. Lorsqu'un client se présente à la caisse, il peut l'accepter ou la refuser. On appelle S le succès « Le client accepte la carte » et E l'échec « Le client refuse la carte ».

1. Cette expérience aléatoire correspond à une épreuve de Bernoulli. Indiquer son paramètre p .

.....

2. n clients se présentent à la caisse, chacun fait son choix indépendamment des autres. On obtient n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. On suppose que $n = 2$. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de clients qui accepteront la carte.

(a) Compléter le tableau.

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

(b) Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X .

3 Coefficients binomiaux

Propriété. (admise)

Soit n un entier naturel et k un entier naturel ($k \leq n$).

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins correspondant à k succès dans un arbre représentant un schéma de Bernoulli à n épreuves.

Cas particuliers : $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{n-1} = n$ et $\binom{n}{n} = 1$.

Propriété

Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p , alors : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Exemple : Une entreprise produit des machines pour l'industrie. Son directeur affirme que seulement 40% des machines auront besoin d'un entretien au cours des cinq prochaines années. Un chef d'entreprise achète quatre de ces machines. On pose X la variable aléatoire qui, à tout ensemble de quatre machines, associe le nombre de machines qui nécessiteront un entretien dans les cinq ans. On appelle « succès » l'événement « la machine nécessitera un entretien ».

1. En utilisant un arbre, donner le nombre de chemins à 2 succès parmi 4. On le note $\binom{4}{2}$.

.....

2. En déduire $P(X = 2)$.

.....

3. Compléter : $\binom{4}{0} = \dots$; $\binom{4}{1} = \dots$; $\binom{4}{3} = \dots$ et $\binom{4}{4} = \dots$.

4 Triangle de Pascal

Dans le tableau ci-dessous, le coefficient $\binom{n}{k}$ est situé à l'intersection de la ligne n et de la colonne k . Certaines valeurs sont déjà données.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$

Exemples : Par lecture du tableau, donner la valeur de :

- $\binom{2}{1}$
- $\binom{3}{2}$

Propriété

Pour tout entier naturel $n \leq 2$ et pour tout entier ($1 \leq k < n$, on a :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Dans le triangle de Pascal, chaque coefficient (sauf dans la première colonne et la diagonale) s'obtient en ajoutant le coefficient au-dessus de lui avec le coefficient à gauche de ce dernier.

Exemples :

1. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,2$.

(a) Compléter : $\binom{10}{0} = \dots$ et $\binom{10}{1} = \dots$.

(b) En déduire la probabilité des événements : $\{X = 0\}$ et $\{X = 1\}$.

.....
.....

2. En utilisant le triangle de Pascal compléter :

$\binom{5}{0} = \dots$; $\binom{5}{1} = \dots$; $\binom{5}{2} = \dots$; $\binom{5}{3} = \dots$; $\binom{5}{3} = \dots$ et $\binom{5}{5} = \dots$;

3. On pose X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,25$. Arrondir les résultats à 0,001. Calculer les probabilités suivantes :

(a) $P(X = 3) = \dots$

.....

(b) $P(X \leq 1) = \dots$

.....

.....