

Série d'exercices

Corrigés

Classe : Maths Expertes

Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

Donner la partie réelle, la partie imaginaire et le conjugué des nombres complexes suivants :

$$z_1 = -2i + 5 \quad z_2 = 15 \quad z_3 = 3i \\ z_4 = i(2 + 3i).$$

Exercice n°2

Soit z un nombre complexe non nul, de forme algébrique $z = x + iy$. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$\text{a) } z_1 = \frac{\bar{z}}{z} \quad \text{b) } z_2 = \frac{iz}{\bar{z}}.$$

Exercice n°3

Effectuez les opérations suivantes en mettant le résultat sous la forme $a + ib$, a et b étant deux réels :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (7 + 2i) + (9 - 4i); & \text{d) } (-2 + 4i)(i - 5); \\ \text{b) } (2i - 3) - (8 + 4i); & \text{e) } (4 - 3i)^2; \\ \text{c) } (2 + 3i)(1 + i); & \text{f) } (1 + i)^3. \end{array}$$

Exercice n°4

Mettre sous la forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{1+i}{1-i}; & \text{c) } \frac{2+i}{3-4i}; & \text{e) } \frac{5+3i}{2i-1}; \\ \text{b) } \frac{1}{3+5i}; & \text{d) } \frac{i-1}{3+2i}; & \text{f) } \frac{3i-4}{4i-3}. \end{array}$$

Exercice n°5

Soit z un nombre complexe non nul.

$$\text{Montrer que } i\bar{z} + \frac{z + 2\Re(z) - \bar{z}}{iz} = -i\bar{z} - 2i.$$

Exercice n°6

Donner la forme algébrique des nombres suivants.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (2 - i)^5; & \text{c) } (1 + 2i)^4; \\ \text{b) } (2 + i)^5; & \text{d) } (1 + 2i)^8. \end{array}$$

Exercice n°7

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (1 + i)z = 2. & \text{d) } -3z^2 + 5z - 6 = 0. \\ \text{b) } (3 - 5i)z = 3 + 5i. & \text{e) } 2z^2 - 3z + \frac{17}{4} = 0. \\ \text{c) } z^2 + 3z + \frac{25}{4} = 0. & \text{f) } 100z^2 + 20z + 37 = 0. \end{array}$$

Exercice n°8

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

$$\begin{array}{ll} 1. z + 2i = iz - 1 & 2. (3 + 2i)(z - 1) = i \\ 3. (2 - i)z + 1 = (3 + 2i)z - i & 4. (4 - 2i)z^2 = (1 + 5i)z. \end{array}$$

Exercice n°9

Soit f l'application complexe qui à tout nombre complexe z associe le nombre iz : $f(z) = iz$.

En posant $z = a + ib$, donner la forme algébrique de $f(z)$ en fonction de a et b .

Exercice n°10

Donner la forme algébrique de la somme :

$$S = \sum_{k=0}^{100} i^k = 1 + i + i^2 + \dots + i^{100}.$$

Exercice n°11

Donner la forme algébrique du produit :

$$\frac{1-i}{1-2i} \times \frac{1+i}{1+2i}.$$

Exercice n°12

On considère l'équation suivante :

$$z^3 - 3z + 4i = 0. \quad (E)$$

1. Montrer que i est une solution de (E) .
2. Trouver les nombres complexes b et c tels que :

$$z^3 - 3z + 4i = (z - i)(z^2 + bz + c).$$

3. Donner les solutions de (E) sous la forme algébrique.

Exercice n°13

On cherche à déterminer $\sqrt{i}$.

Pour cela, on considère le nombre $z = a + bi$ tel que $z^2 = i$.

Trouver les valeurs possibles de a et b .

Exercice n°14

Déterminer la forme algébrique de $\sqrt{-7 + 24i}$.

Exercice n°15

Résoudre les systèmes suivants, d'inconnues les nombres complexes z_1 et z_2 :

$$\begin{cases} 2z_1 - z_2 = i \\ -2z_1 + 3iz_2 = -17 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 3iz_1 + iz_2 = i + 7 \\ iz_1 + 2z_2 = 11i \end{cases}.$$