

Série d'exercices

Corrigés

Classe : Maths Expertes

Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Donner les dimensions de ces matrices.
2. Effectuer toutes les sommes de matrices possibles.
3. Calculer $B + 2D$.

Exercice n°2

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculer $A \times B$ puis $B \times A$ et constater la non commutativité du produit matriciel dans un cas général.

Exercice n°3

Soient $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Montrer que A et B sont inverses l'une de l'autre.

Exercice n°4

Dans chacun des cas suivants, déterminer la matrice inverse de A quand cela est possible.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. c) $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice n°5

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

1. Calculer A^2 , puis A^3 à l'aide de la calculatrice (par exemple).
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

3. Si on remplace n par -1 dans l'expression précédente, obtient-on l'inverse de A ?

Exercice n°6

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$.
2. En déduire que A est inversible, et déterminer son inverse.

Exercice n°7

On considère les matrices :

$$N = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -9 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer N^2 puis N^3 .
2. En remarquant que $A = N + I_3$, I_3 étant la matrice identité d'ordre 3, donner une expression de A^n pour tout entier naturel $n \geq 3$.

N est qualifiée de *nilpotente* car il existe un entier naturel k (ici, $k = 3$) pour lequel $N^k = 0$.

Exercice n°8

Résoudre de façon matricielle les systèmes linéaires suivants.

On pourra effectuer les calculs à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel pour déterminer l'inverse des matrices utilisées.

1.
$$\begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ -4x + 2y = 1 \end{cases},$$

2.
$$\begin{cases} 5x + 4y = -1 \\ 3x - y = 2 \end{cases},$$

3.
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 3 \end{cases},$$

4.
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ x - 2y - 3z = -6 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases},$$

Exercice n°9

À l'aide de votre calculatrice et en associant à chacun des systèmes suivant sa matrice, trouver leurs solutions.

1.
$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases},$$

$$2. \begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ 2x - 7y = 5 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} -x + 2y = -1 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 5x + 4y = -3 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

Exercice n°10

On considère les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ définies par $a_0 = 0,3$, $b_0 = 0,7$ et :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,7a_n + 0,6b_n \\ b_{n+1} = 0,3a_n + 0,4b_n \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n , on définit la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Écrire la matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $U_n = A^n U_0$.
3. À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel, calculer A^2 , A^3 et A^4 .

Que peut-on conjecturer quant à $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n$, et donc sur les limites des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$?

Exercice n°11

On considère les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n , on définit la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Écrire la matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $U_n = A^n U_0$.
3. On définit les matrices $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
Montrer que P et Q sont inverses l'une de l'autre.
4. Déterminer la matrice diagonale D telle que $QDP = A$.
5. En déduire que pour tout entier naturel n , $U_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$.

6. En déduire la limite des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$.

Exercice n°12

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2^n$.

1. Montrer que pour tout entier naturel $n > 0$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

2. En considérant la somme des $u_{n+1} - u_n$, exprimer u_n en fonction de n , puis A^n .

Exercice n°13

On considère un polynôme de degré 3 dont la courbe représentative passe par les points de coordonnées :

$$A(-2; -1), \quad B(-1; 3), \quad C(1; 5), \quad D(2; 34).$$

Donner l'expression de ce polynôme.

Exercice n°14

On considère un mot constitué de lettres : $L_1 L_2 \cdots L_n$, n étant pair.

Soient 4 nombres a , b , c et d qui vont constituer la clé du chiffrement.

On remplace L_i par sa position dans l'alphabet en convenant d'avoir 0 pour A, 1 pour B, etc. On obtient alors une suite de nombres : $u_1, u_2, \dots, u_n$. On pose alors :

$$\forall k \in \llbracket 1, \frac{n}{2} \rrbracket, \begin{pmatrix} c_{2k-1} \\ c_{2k} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2k-1} \\ u_{2k} \end{pmatrix} \pmod{26}$$

On obtient une suite de nombres $c_1, c_2, \dots, c_n$ qui correspond à une suite de lettres.

Choisissons la clé matricielle $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$.

1. Expliquer comment obtenir le chiffrement du mot « CRYPT ».
2. Expliquer le déchiffrement.

Exercice n°15

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par ses deux premiers termes $u_0 = 3$ et $u_1 = 1$, et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n,$$

On pose alors :

$$U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

et la matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$.

1. Donner l'expression de A .
2. Calculer A^2 , puis A^3 . En déduire l'inverse de A .
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .