

Nombres complexes Point de vue algébrique

Maths Expertes

maths-mde.fr
Cours à imprimer pour élève

Lycée Evariste Galois

Introduction historique

Activité - Corrigé

Tout commence avec la résolution de l'équation :

$$x^3 = 15x + 4.$$

Au XVI^e siècle, en 1545 plus exactement, Jérôme Cardan, un mathématicien italien, a travaillé « dur » pour établir une formule qui pourrait donner une solution à toute équation de la forme $x^3 = px + q$. Il s'agit de la formule suivante :

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Si l'on considère l'équation que l'on souhaite résoudre, on prend $p = 15$ et $q = 4$, puis on applique cette formule :

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{4^2}{4} - \frac{15^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{4^2}{4} - \frac{15^3}{27}}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}}. \quad (1)$$

Diantre ! Nous avons affaire à $\sqrt{-121}$... Cette formule serait-elle fausse ?

Qu'à cela ne tienne !

Le grand mathématicien est sûr de sa formule ! Il décide alors d'aller au-delà de ces connaissances contemporaines et créer une nouvelle mathématique dans laquelle, il est possible calculer une racine carrée d'un nombre négatif !

Pour cela, il commence par considérer que $\sqrt{-1}$ existe, et il le note « i » de sorte que $i^2 = -1$.

Alors,

$$\sqrt{-121} = \sqrt{121 \times i^2} = \sqrt{(11i)^2} = 11i.$$

Ainsi,

$$(1) \iff x = \sqrt[3]{2 + 11i} - \sqrt[3]{-2 + 11i}.$$

Par intuition, en appliquant les mêmes règles de calculs déjà connus, et utilisant la distributivité pour développer, il obtient :

$$\begin{aligned}(2+i)^3 &= (2+i)(2+i)^2 \\ &= (2+i)(2^2 + 4i + i^2) \\ &= (2+i)(4 + 4i - 1) \\ &= (2+i)(3 + 4i) \\ &= 6 + 8i + 3i + 4i^2 \\ &= 6 + 11i - 4 \\ &= 2 + 11i.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$2+i = \sqrt[3]{2+11i}.$$

On démontrerait de même que :

$$-2+i = \sqrt[3]{-2+11i}.$$

Finalement,

$$(1) \iff x = 2+i - (-2+i) = 4.$$

Fichtre ! Une solution bien réelle alors que nous sommes passés par une mathématique hypothétique en introduisant ce sibyllin nombre i ? Vérifions tout de même si cette valeur est bien solution de l'équation initiale :

$$x^3 = 4^3 = 64 \quad \text{et} \quad 15x + 4 = 15 \times 4 + 4 = 60 + 4 = 64.$$

La valeur trouvée est donc bien une solution ! La mathématique créée pour l'occasion s'avère donc utile... Cela mérite développement !
Le nombre i telle que $i^2 = -1$, est alors inventé. Ce nombre n'est bien entendu pas réel.

L'ensemble de nombres obtenus par *combinaison linéaire* du nombre réel « 1 » et du nom *imaginaire* « i », c'est-à-dire des nombres de la forme $a \times 1 + b \times i$, où a et b sont réels, est alors défini.

I. L'ensemble $\mathbb{C}$

Définition

On appelle *nombre complexe* tout nombre de la forme :

$$z = a + ib$$

où a et b sont deux nombres réels, et où $i^2 = -1$.

On dira alors que :

- a est la *partie réelle* de z , notée $\Re(z)$;
- b est la *partie imaginaire* de z , noté $\Im(z)$.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{C} = \{a + ib, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\} = \{a + ib, (a; b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Attention !

La partie imaginaire ne contient pas le « i ».

Exemples

- ① $z_1 = 3 + i$ est un nombre complexe dont la partie réelle est $a = 3$ et la partie imaginaire est $b = 1$.
- ② $z_2 = -i$ est un nombre complexe dont la partie réelle est $a = 0$ et la partie imaginaire est $b = -1$.
- ③ $z_3 = 7$ est un nombre complexe dont la partie réelle est $a = 7$ et la partie imaginaire est $b = 0$.

II. Opérations algébriques sur $\mathbb{C}$

Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle *conjugué* de z le nombre :

$$\bar{z} = a - ib.$$

Propriété

Pour tout nombre complexe $z = a + ib$,

$$z \times \bar{z} = a^2 + b^2.$$

Démonstration

En utilisant la troisième identité remarquable, on obtient :

$$\begin{aligned}(a + ib)(a - ib) &= a^2 - (ib)^2 \\ &= a^2 - i^2 b^2 \\ &= a^2 - (-1)b^2 \\ &= a^2 + b^2.\end{aligned}$$

II. Opérations algébriques sur $\mathbb{C}$

Considérons deux nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. On définit alors :

a la somme : $z + z' = (a + a') + i(b + b')$;

b le produit : $z \times z' = (a + ib)(a' + ib')$
 $= aa' + iab' + iba' + bb'i^2$
 $= (aa' - bb') + i(ba' + ab').$

c l'opposé : $-z = -a - ib$;

d la différence : $z - z' = z + (-z') = (a - a') + i(b - b')$.

e l'inverse : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$;

f le quotient : $\frac{z}{z'} = \frac{z\bar{z'}}{z'z'} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2}i.$

Remarque

Il n'est pas demandé d'apprendre par cœur ces formules, mais juste de retenir les modes opératoires.

Théorème (unicité)

Soient $a + ib$ et $a' + ib'$ deux nombres complexes écrits sous la forme algébrique.

$$a + ib = a' + b'i \Leftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'.$$

Démonstration

$\Leftarrow$) Si $a = a'$ et $b = b'$, il est évident que $a + ib = a' + b'i$

$\Rightarrow$) Supposons que $b \neq b'$. Nous avons alors,

$$a + ib = a' + b'i \Rightarrow a - a' = (b' - b)i \Rightarrow i = \frac{a - a'}{b' - b}.$$

Ce qui est absurde, dans la mesure où $\frac{a - a'}{b' - b} \in \mathbb{R}$ et $i \in \mathbb{C}$. On déduit donc que $b = b'$.

Par ailleurs, $a + ib = a' + bi \Rightarrow a = a'$.

Par conséquent, l'écriture de la forme algébrique d'un nombre complexe est unique.

Propriétés

Soient z et z' deux nombres complexes, $z' \neq 0$.

$$\textcircled{1} \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$\textcircled{2} \quad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

$$\textcircled{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{\bar{z}}{z'} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

$$\textcircled{5} \quad \overline{\bar{z}} = z$$

$$\textcircled{6} \quad \bar{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{7} \quad \Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$\textcircled{8} \quad \Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Démonstration

Posons $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \overline{z + z'} &= \overline{(a + a') + i(b + b')} \\ &= (a + a') - i(b + b') \\ &= (a - ib) + (a' - ib') \\ &= \bar{z} + \bar{z}' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \overline{z \times z'} &= \overline{(a + ib)(a' + ib')} \\ &= \overline{(aa' - bb') + i(ab' + ba')} \\ &= (aa' - bb') - i(ab' + ba'). \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \overline{z} \times \overline{z'} &= \overline{a + ib} \times \overline{a' + ib'} \\ &= (a - ib)(a' - ib') \\ &= (aa' - bb') - i(ab' + ba') \\ &= \overline{z \times z'}. \end{aligned}$$

③ Démontrons l'égalité par récurrence.

- **Initialisation** : pour $n = 0$,

$$\overline{z^n} = \overline{z^0} = \overline{1} = 1 = \overline{z^0}.$$

- **Hérédité** : supposons que pour un entier k fixé, $\overline{z^k} = \overline{z}^k$ (HR).

$$\begin{aligned} \overline{z^{k+1}} &= \overline{z^k \times z} \\ &= \overline{z^k} \times \overline{z} \text{ d'après l'item précédent} \\ &= \overline{z}^k \times \overline{z} \text{ d'après (HR)} \\ &= \overline{z}^{k+1}. \end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée.

L'égalité est alors vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

$$④ \quad \overline{\frac{1}{z'}} = \frac{a'}{a'^2 + b'^2} + \frac{b'}{a'^2 + b'^2}i$$

$$\begin{aligned} \text{et } \overline{\frac{1}{z'}} &= \frac{1}{a' - ib'} \times \frac{a' + ib'}{a' + ib'} \\ &= \frac{a' + ib'}{a'^2 + b'^2} \\ &= \overline{\frac{1}{z'}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \overline{\frac{z}{z'}} &= z \times \overline{\frac{1}{z'}} \\ &= \bar{z} \times \overline{\frac{1}{z'}} \text{ d'après l'item 2 de cette propriété} \\ &= \bar{z} \times \frac{1}{z'} \text{ d'après ce qui a été fait en amont au début de cet item} \\ &= \frac{\bar{z}}{z'}. \end{aligned}$$

$$⑤ \quad \overline{\bar{z}} = \overline{a - ib} = a + ib = z.$$

$$⑥ \quad \bar{z} - z = (a - ib) - (a + ib) = -2ib.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \bar{z} = z &\iff \bar{z} - z = 0 \\ &\iff -2ib = 0 \\ &\iff b = 0 \\ &\iff z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\textcircled{7} \quad \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{(a + ib) + (a - ib)}{2}$$

$$= \frac{2a}{2}$$

$$= a$$

$$= \Re(z).$$

$$\textcircled{8} \quad \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{(a + ib) - (a - ib)}{2i}$$

$$= \frac{2bi}{2i}$$

$$= b$$

$$= \Im(z).$$

III. Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Propriété

Soient a et b deux nombres complexes.

L'équation $az + b = 0$, d'inconnue z , admet pour solution dans $\mathbb{C}$:

$$z = -\frac{b}{a}, \quad \text{avec } a \neq 0.$$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $iz + (1 + i) = 0$.

$$\begin{aligned} iz + (1 + i) = 0 &\iff z = -\frac{1 + i}{i} \\ &\iff z = -\frac{1}{i} - \frac{i}{i} \\ &\iff z = -\frac{i}{i^2} - 1 \\ &\iff z = -1 + i. \end{aligned}$$

Ainsi, $S = \{-1 + i\}$.

Propriété

Soient a , b et c trois nombres réels.

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Remarque

Dans ce cas, $z_2 = \overline{z_1}$.

Exemple

Le polynôme $z^2 + z + 1$ a pour discriminant $\Delta = -3$, donc ses racines sont :

$$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Démonstration

Si $a = 0$, on retrouve une équation du premier degré $bz + c = 0$ qu'on peut résoudre aisément.

Si $a \neq 0$, alors

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow a \left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0.$$

$$\text{Si } \Delta \geq 0, az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0.$$

$$\text{Ainsi, } S = \left\{ \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}.$$

Si $\Delta < 0$,

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right) \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right) = 0.$$

$$\text{Ainsi, } S = \left\{ \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}; \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \right\}.$$

IV. La somme des termes d'une suite géométrique

Propriété

Soit q un nombre complexe. Pour tout nombre entier n , nous avons :

$$q^n - 1 = (q - 1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q^2 + q + 1). \quad (1)$$

Démonstration

1ère méthode :

$$\begin{aligned} & (q - 1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1) \\ = & q(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1) - 1(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1) \\ = & q^n + \cancel{q^{n-1}} + \cdots + \cancel{q^2} + \cancel{q} - \cancel{q^{n-1}} - \cancel{q^{n-2}} - \cdots - \cancel{q} - 1 \\ = & q^n - 1. \end{aligned}$$

2ème méthode : Démonstration par récurrence.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $q^1 - 1 = (q - 1)(q^{1-1}) = q - 1$.

Hérédité : Supposons que l'égalité (1) est vraie pour un nombre entier n , fixé.

Montrons que l'égalité (1) est vraie pour $n + 1$. En effet, pour $q \neq 1$,

$$\begin{aligned}\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} &= \frac{qq^n - q + q - 1}{q - 1} \\ &= q \frac{q^n - 1}{q - 1} + \frac{q - 1}{q - 1} \\ &= q(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1) + 1 \\ &= q^{n+1} + q^{n-1} + \cdots + q + 1.\end{aligned}$$

Ainsi, $q^{n+1} - 1 = (q - 1)(q^n + q^{n-1} + \cdots + q + 1)$.

Conclusion : Pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$q^n - 1 = (q - 1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q^2 + q + 1).$$

Propriété

Soient a et b deux nombres complexes. Pour tout nombre entier n , nous avons :

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}). \quad (2)$$

Démonstration

Posons $q = \frac{a}{b}$, avec $b \neq 0$. En remplaçant q par $\frac{a}{b}$ dans l'égalité (1), on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^n - 1 &= \left(\frac{a}{b} - 1\right) \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^{n-2} + \cdots + \frac{a}{b} + 1\right) \\ \Leftrightarrow \frac{a^n - b^n}{b^n} &= \left(\frac{a - b}{b}\right) \left(\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + \frac{a^{n-2}}{b^{n-2}} + \cdots + \frac{a}{b} + 1\right) \\ \Leftrightarrow b^n \times \frac{a^n - b^n}{b^n} &= b^n \times \left(\frac{a - b}{b}\right) \left(\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + \frac{a^{n-2}}{b^{n-2}} + \cdots + \frac{a}{b} + 1\right) \\ \Leftrightarrow a^n - b^n &= b^{n-1} (a - b) \left(\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + \frac{a^{n-2}}{b^{n-2}} + \cdots + \frac{a}{b} + 1\right) \\ \Leftrightarrow a^n - b^n &= (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}). \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

V. Formule du binôme de Newton

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle « factorielle » de n le nombre

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^n k.$$

Par convention, on pose $0! = 1$.

Exemples

$$\begin{array}{llllll} 1! = 1 & 2! = 2 & 3! = 6 & 4! = 24 & 5! = 120 & 6! = 720 \\ 7! = 5\,040 & 8! = 40\,320. & & & & \end{array}$$

Proposition

$n!$ est le nombre de **permutations** d'un ensemble contenant n éléments.

Exemples

- **Cas $n = 3$** : Il y a $3! = 6$ permutations possibles de 3 éléments.

$$\begin{array}{cccccc} 123 & 132 & 213 & 231 & 312 & 321 \end{array}$$

- **Cas $n = 4$** : Il y a $4! = 24$ permutations possibles de 4 éléments.

$$\begin{array}{cccccc} 1234 & 1243 & 1324 & 1342 & 1423 & 1432 \\ 2134 & 2143 & 2314 & 2341 & 2413 & 2431 \\ 3124 & 3142 & 3214 & 3241 & 3412 & 3421 \\ 4123 & 4132 & 4213 & 4231 & 4312 & 4321 \end{array}$$

V. Formule du binôme de Newton

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle « factorielle » de n le nombre

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^n k.$$

Par convention, on pose $0! = 1$.

Exemples

$$\begin{array}{llllll} 1! = 1 & 2! = 2 & 3! = 6 & 4! = 24 & 5! = 120 & 6! = 720 \\ 7! = 5\,040 & 8! = 40\,320. & & & & \end{array}$$

Proposition

$n!$ est le nombre de **permutations** d'un ensemble contenant n éléments.

Exemples

- **Cas** $n = 3$: Il y a $3! = 6$ permutations possibles de 3 éléments.

$$123 \quad 132 \quad 213 \quad 231 \quad 312 \quad 321$$

- **Cas** $n = 4$: Il y a $4! = 24$ permutations possibles de 4 éléments.

$$\begin{array}{llllll} 1234 & 1243 & 1324 & 1342 & 1423 & 1432 \\ 2134 & 2143 & 2314 & 2341 & 2413 & 2431 \\ 3124 & 3142 & 3214 & 3241 & 3412 & 3421 \\ 4123 & 4132 & 4213 & 4231 & 4312 & 4321 \end{array}$$

V. Formule du binôme de Newton

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle « factorielle » de n le nombre

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^n k.$$

Par convention, on pose $0! = 1$.

Exemples

$$\begin{array}{llllll} 1! = 1 & 2! = 2 & 3! = 6 & 4! = 24 & 5! = 120 & 6! = 720 \\ 7! = 5\,040 & 8! = 40\,320. & & & & \end{array}$$

Proposition

$n!$ est le nombre de **permutations** d'un ensemble contenant n éléments.

Exemples

- **Cas** $n = 3$: Il y a $3! = 6$ permutations possibles de 3 éléments.

$$\begin{array}{cccccc} 123 & 132 & 213 & 231 & 312 & 321 \end{array}$$

- **Cas** $n = 4$: Il y a $4! = 24$ permutations possibles de 4 éléments.

$$\begin{array}{cccccc} 1234 & 1243 & 1324 & 1342 & 1423 & 1432 \\ 2134 & 2143 & 2314 & 2341 & 2413 & 2431 \\ 3124 & 3142 & 3214 & 3241 & 3412 & 3421 \\ 4123 & 4132 & 4213 & 4231 & 4312 & 4321 \end{array}$$

- $\frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} = \frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}{(2n+1)!} = (2n+3)(2n+1).$
- $\frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!} = (n+1)n(n-1) + n = n^3.$

Arrangements (facultatif)

On dispose de n objets discernables. On en prélève successivement p les uns après les autres. Il y a :

- n choix possibles pour prélever le 1er objet ;
- $(n-1)$ choix possibles pour prélever le 2ème objet ;
- $(n-2)$ choix possibles pour prélever le 3ème objet ;
- ...
- $(n-p+1)$ choix possibles pour prélever le p ème objet.

On obtient ainsi $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)$ prélèvements possibles, soit $\frac{n!}{(n-p)!}$.

C'est le nombre d'**arrangements** de p objets parmi n . On le note A_n^p .

Exemples

Un pronostic de tiercé ordonné (pari hippique) revient à désigner 3 numéros parmi n (effectif total des partants), soit A_n^3 .

Pour une course de 10 partants, il y a $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$ tiercés ordonnés possibles.

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{0, 1, \dots, n\}$.

On désigne par *coefficient binomial* « k parmi n » le nombre :

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ et } n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n.$$

Il désigne par exemple le nombre de sous-ensembles à k éléments pris parmi n éléments distincts.

Exemples

- $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins dans l'arbre binaire représentatif d'un schéma de n épreuves de Bernoulli conduisant à p succès.
- $\binom{n}{k}$ est le nombre de prélèvements simultanés (sans remise) de p objets parmi n .

Propriété

Pour tout entier naturel n et pour tout entier $k \leq n$,

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!} \\ &= \frac{k \times n!}{k \times (n-k+1)!(k-1)!} + \frac{(n-k+1) \times n!}{(n-k+1) \times (n-k)!k!} \\ &= \frac{k \times n!}{(n-k+1)!k!} + \frac{(n-k+1) \times n!}{(n-k+1)!k!} \\ &= \frac{k \times n! + (n-k+1) \times n!}{(n-k+1)!k!} \\ &= \frac{(n+1) \times n!}{(n-k+1)!k!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!k!} \\ &= \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

À l'aide de cette propriété, nous pouvons « construire » une visualisation des premiers coefficients binomiaux.

Chaque nombre en noir est obtenu en ajoutant le nombre au-dessus et celui qui est à gauche du nombre au-dessus, comme le montre l'exemple du $6 = 3 + 3$ qui illustre l'égalité : $\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2}$.

Nombres
complexes
Point de vue
algébrique

Maths Expertes

Introduction
historique

L'ensemble $\mathbb{C}$

Opérations
algébriques sur $\mathbb{C}$

Résolution
d'équations dans
 $\mathbb{C}$

La somme d'une
suite
géométrique

Formule du
binôme de
Newton

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$

Formule du binôme de Newton

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. On a,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration

Démontrons cette égalité par récurrence.

- **Initialisation** : $(a + b)^1 = a + b$ et

$$\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = b + a = a + b.$$

- **Hérédité** : supposons que pour un entier p fixé, $(a + b)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^k b^{p-k}$.

Alors,

$$\begin{aligned} (a + b)^{p+1} &= (a + b)(a + b)^p \\ &= (a + b) \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^k b^{p-k} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= a \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^k b^{p-k} + b \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^k b^{p-k} \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^{k+1} b^{p-k} + \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^k b^{p-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p}{k-1} a^k b^{p-(k-1)} + \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^k b^{p-k+1} \\ &= \left[\sum_{k=1}^p \binom{p}{k-1} a^k b^{p-k+1} + \binom{p}{p} a^{p+1} b^{p-(p+1-1)} \right] \\ &\quad + \left[\sum_{k=1}^p \binom{p}{k} a^k b^{p-k+1} + \binom{p}{0} a^0 b^{p-0+1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{p+1} &= \sum_{k=1}^p \left(\binom{p}{k-1} + \binom{p}{k} \right) a^k b^{n_k+1} + a^{p+1} b^0 + a^0 b^{p+1} \\
 &= \sum_{k=1}^p \binom{p+1}{k} a^k b^{n_k+1} + a^{p+1} + b^{p+1} \quad \text{car } \binom{p}{k-1} + \binom{p}{k} = \binom{p+1}{k} \\
 &= \sum_{k=1}^p \binom{p+1}{k} a^k b^{n_k+1} + \underbrace{\binom{p+1}{p+1}}_{=1} a^{p+1} + \underbrace{\binom{p+1}{0}}_{=1} b^{p+1} \\
 &= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} a^k b^{n-k+1}.
 \end{aligned}$$

L'égalité est alors vraie au rang $p+1$. L'hérédité est alors vérifiée.

Propriété

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 4k \\ i & \text{si } n = 4k + 1 \\ -1 & \text{si } n = 4k + 2 \\ -i & \text{si } n = 4k + 3 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration

Raisonnons par disjonction de cas sur n :

- si $n = 4k$, $i^n = i^{4k} = (i^4)^k = [(i^2)^2]^k = [(-1)^2]^k = [1]^k = 1$.
- si $n = 4k + 1$, $i^n = i^{4k+1} = i^{4k} \times i^1 = 1 \times i = i$.
- si $n = 4k + 2$, $i^n = i^{4k+1} \times i^1 = i \times i = -1$.
- si $n = 4k + 3$, $i^n = i^{4k+2} \times i^1 = -1 \times i = -i$.

Propriété

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, et soit n un entier naturel. Alors,

$$\begin{aligned} z^n &= (a + ib)^n \\ &= \sum_{\substack{k=4p \\ k \leq n}} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k - \sum_{\substack{k=4p+2 \\ k \leq n}} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &\quad + i \left(\sum_{\substack{k=4p+1 \\ k \leq n}} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k - \sum_{\substack{k=4p+3 \\ k \leq n}} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) \end{aligned}$$

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, avec $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$.

Exemple : Calculons $(2 + 3i)^6$.

$$(2 + 3i)^6 = \sum_{\substack{k=4p \\ k \leq 6}} \binom{6}{k} 2^{6-k} 3^k - \sum_{\substack{k=4p+2 \\ k \leq 6}} \binom{6}{k} 2^{6-k} 3^k \\ + i \left(\sum_{\substack{k=4p+1 \\ k \leq 6}} \binom{6}{k} 2^{6-k} 3^k - \sum_{\substack{k=4p+3 \\ k \leq 6}} \binom{6}{k} 2^{6-k} 3^k \right)$$

$$(2 + 3i)^6 = \binom{6}{0} 2^6 3^0 + \binom{6}{4} 2^{6-4} 3^4 - \binom{6}{2} 2^{6-2} 3^2 + \binom{6}{6} 2^{6-6} 3^6 \\ + i \left(\binom{6}{1} 2^{6-1} 3^1 + \binom{6}{5} 2^{6-5} 3^5 - \binom{6}{3} 2^{6-3} 3^3 \right) \\ = 1 \times 2^6 + 15 \times 2^2 \times 3^4 - 15 \times 2^4 \times 3^2 + 1 \times 3^6 \\ + i \left(6 \times 2^5 \times 3 + 6 \times 2^1 \times 3^5 - 20 \times 2^3 \times 3^3 \right) \\ = 4924 - 2889 + i(3492 - 4320) \\ = 2035 - 828i.$$