

Exercice 1 : (4 points)

- 1 Déterminer une forme trigonométrique, puis la forme algébrique des deux nombres complexes suivants.

(a) $z_1 = 4e^{\frac{17\pi}{4}i}$.

(b) $z_2 = 3e^{\frac{-10\pi}{2}i}$.

- 2 Déterminer une forme exponentielle des deux nombres complexes suivants.

(a) $z_3 = \frac{9}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{2}i$.

(b) $z_4 = -\pi i$.

Exercice 2 : (3 points)

Déterminer dans chaque cas la nature de l'ensemble de points M d'affixe z du plan complexe vérifiant :

1 $|z - 2i + 1| = 3$.

2 $|z - 34i| = |z - 5 + i|$.

Exercice 3 : (5 points)

Les cinq questions sont indépendantes.

1 Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$.

2 À l'aide de la formule de Moivre, donner la forme algébrique de $(-5 + 5\sqrt{3}i)^6$.

3 À l'aide des formules d'Euler, écrire $\sin^4(x)$ sous la forme d'une expression linéarisée.

4 Trouver tous les nombres complexes z tels que $z^4 = 1$ et donner leur forme exponentielle.

5 Soit $P(z) = \frac{1}{2}z^3 + 5z + \frac{11}{2}$. Montrer que $P(-1) = 0$, puis résoudre l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 4 : (8 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par :
$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = (1+i)z_n - i \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe z_n et B le point d'affixe $z_B = 1$.

1 (a) Montrer que $z_1 = -i$ et que $z_2 = 1 - 2i$ puis calculer z_3 .

(b) Placer les points B, A_1, A_2 et A_3 dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 1 cm sur les deux axes).

(c) Calculer $\frac{z_2 - z_1}{z_B - z_1}$. Quelle est la nature du triangle BA_1A_2 ? Justifier.

2 Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n - 1|$.

(a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

(b) Déterminer à partir de quel entier naturel n , la distance BA_n est strictement supérieure à 1 000. On détaillera la démarche choisie.

3 (a) Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe $1 + i$.

(b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $z_n = 1 - (\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

(c) Le point A_{2020} appartient-il à l'axe des abscisses? Justifier.