

Exercice 1 : (4 points)

1 On rappelle que : $z = re^{i\theta} = r[\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$.

- (a) Une forme trigonométrique est donnée par,
 $z_1 = 4 \left[\cos \left(\frac{17\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{17\pi}{4} \right) \right]$.
 Or, le cosinus et le sinus sont deux fonctions 2π périodiques. Donc,
 $\cos \left(\frac{17\pi}{4} \right) = \cos \left(4\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 et $\sin \left(\frac{17\pi}{4} \right) = \sin \left(4\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 Dès lors, la forme algébrique est donnée par,

$$z_1 = 4 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i.$$

- (b) Une forme trigonométrique est donnée par,
 $z_2 = 3 \left[\cos \left(-\frac{10\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{10\pi}{2} \right) \right]$.
 Or, $\cos \left(-\frac{10\pi}{2} \right) = \cos(-5\pi) = -1$
 et $\sin \left(-\frac{10\pi}{2} \right) = \sin(-5\pi) = 0$.
 Donc, la forme algébrique est donnée par,

$$z_2 = -3.$$

2 Le mieux est de calculer d'abord le module d'un nombre complexe avant de donner sa forme exponentielle.

- (a) Calculons $|z_3|$:

$$|z_3| = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{81} = 9.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} z_3 &= \frac{9}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{2}i \\ &= 9 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= 9 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) \\ &= 9e^{-i\frac{\pi}{3}}. \end{aligned}$$

- (b) Calculons $|z_4|$:

$$|z_4| = \sqrt{(-\pi)^2} = \pi.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} z_4 &= \pi \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= \pi e^{-\frac{\pi}{2}i}. \end{aligned}$$

Exercice 2 : (3 points)

1 L'ensemble de points M d'affixe z du plan complexe vérifiant $|z - 2i + 1| = 3$, est le cercle de centre O d'affixe $2i - 1$ et de rayon $\sqrt{3}$. En effet, en posant $z = x + iy$, on obtient l'équation du cercle :

$$\begin{aligned} |z - 2i + 1| = 3 &\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = 3 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9. \end{aligned}$$

2 L'ensemble de points M d'affixe z du plan complexe vérifiant $|z - 34i| = |z + 2 + i|$, est la médiatrice du segment $[AB]$, avec A et B les deux points d'affixe respective $34i$ et $5 - i$. On peut déterminer une équation de cette droite, en notant $z = x + iy$,

$$\begin{aligned} |z - 34i| = |z - 5 + i| &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-34)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y+1)^2} \\ &\Leftrightarrow x^2 + (y-34)^2 = (x-5)^2 + (y+1)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 68y + 1156 = x^2 - 10x + 25 + y^2 + 2y + 1 \\ &\Leftrightarrow -70y + 10x + 1130 = 0. \quad (*) \end{aligned}$$

(*) est une équation cartésienne de la droite (AB) .

Exercice 3 : (5 points)

Les cinq questions sont indépendantes.

- 1** On sait que : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$. De plus, $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, la fonction cosinus est paire donc, $\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

- 2** En utilisant la formule de Moivre $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$, on obtient :

$$\begin{aligned}(-5 + 5\sqrt{3}i)^6 &= \left(10\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^6 \\ &= 10^6 \times \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6 \\ &= 10^6 \times \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^6 \\ &= 10^6 \times \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} \times 6\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} \times 6\right)\right) \\ &= 10^6 \times (\cos(4\pi) + i\sin(4\pi)) \\ &= 1\,000\,000.\end{aligned}$$

- 3** En utilisant la formule d'Euler $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\sin^4(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 \\ &= \frac{e^{4ix} - 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} - 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}}{16} \\ &= \frac{e^{4ix} + e^{-4ix} - 4e^{2ix} - 4e^{-2ix} + 6}{16} \\ &= \frac{\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3}{8}.\end{aligned}$$

- 4** Posons $z = e^{i\theta}$. Ainsi, $z^4 = 1 \iff |z|^4 = 1 \iff |z| = 1$.

Par ailleurs,

$$z^4 = 1 \iff e^{4i\theta} = e^{i(0+2k\pi)}, k \in \mathbb{Z} \iff \theta = \frac{2k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \iff \theta = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

- Si $k = 4p$, alors $z = e^{i \times 2p\pi} = 1$.
- Si $k = 4p + 1$, alors $z = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2p\pi)} = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$;
- si $k = 4p + 2$, alors $z = e^{i(\pi + 2p\pi)} = e^{i\pi} = -1$.
- si $k = 4p + 3$, alors $z = e^{i(\frac{3\pi}{2} + 2p\pi)} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$.

Ainsi, $S = \{-1 ; 1 ; -i ; i\}$.

5 On a $P(z) = \frac{1}{2}z^3 + 5z + \frac{11}{2}$. Il est assez aisé de remarquer que 1 est une solution évidente. En effet,

$$P(1) = \frac{1}{2} \times 1^3 + 5 \times 1 + \frac{11}{2} = \frac{1}{2} + \frac{10}{2} + \frac{11}{2} = 0.$$

On en déduit alors que :

$$P(z) = (z + 1)(az^2 + bz + c).$$

En développant, on obtient :

$$P(z) = az^3 + (a + b)z^2 + (b + c)z + c.$$

L'identification des coefficients, entraîne :

$$\begin{cases} a &= \frac{1}{2} \\ a + b &= 0 \\ b + c &= 5 \\ c &= \frac{11}{2} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a &= \frac{1}{2} \\ b &= -\frac{1}{2} \\ c &= \frac{11}{2} \end{cases}.$$

Ainsi,

$$P(z) = (z + 1) \left(\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{11}{2} \right).$$

Le discriminant de $\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{11}{2}$ est :

$$\Delta = -\frac{43}{4}.$$

donc ses racines complexes sont :

$$z_1 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{43}i}{2}}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{43}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \bar{z}_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{43}}{2}i.$$

Par conséquent, les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sont -1 , z_1 et z_2 .

Exercice 4 : (8 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par : $\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = (1+i)z_n - i \end{cases}$.

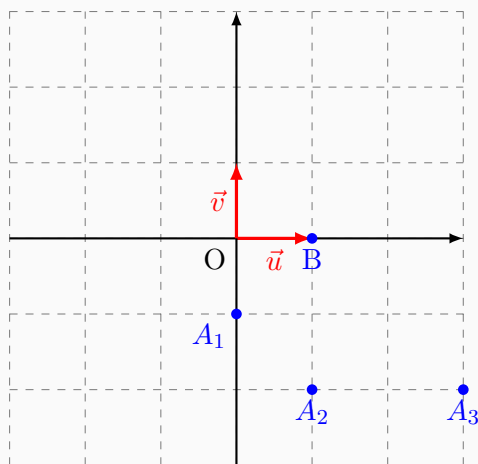
Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe z_n et B le point d'affixe $z_B = 1$.

1 **a** $z_1 = (1+i) \times z_0 - i = (1+i) \times 0 - i = -i.$

$$z_2 = (1+i) \times z_1 - i = (1+i) \times (-i) - i = -i + 1 - i = 1 - 2i.$$

$$z_3 = (1+i) \times z_2 - i = (1+i) \times (1 - 2i) - i = 1 - 2i + i - 2i^2 - i = 3 - 2i.$$

b Voir la figure ci-après, les points B , A_1 , A_2 et A_3 sont placés dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.



③ On a : $\frac{z_2 - z_1}{z_B - z_1} = \frac{1 - 2i - (-i)}{1 - (-i)} = \frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i)^2}{2} = \frac{1 - 2i + i^2}{2} = -i.$

De plus, $\left(\overrightarrow{A_1 B}; \overrightarrow{A_1 A_2}\right) = \arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_B - z_1}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi].$

Par ailleurs, $BA_1 = |z_B - z_1| = |1 - i| = \sqrt{2}$ et $A_2 A_1 = |z_2 - z_1| = |1 + i| = \sqrt{2}.$

On déduit alors que le triangle $BA_1 A_2$ est rectangle et isocèle en A_1 .

2 Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n - 1|$.

① Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= |z_{n+1} - 1| \\ &= |(1 + i)z_n - i - 1| \\ &= |(1 + i)(z_n - 1)| \\ &= |1 + i||z_n - 1| \\ &= \sqrt{2}u_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme $u_0 = 1$.

② On a : $BA_n = |z_n - z_B| = |z_n - 1| = u_n$. De plus, (u_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme $u_0 = 1$, donc $u_n = u_0 \sqrt{2}^n = 2^{\frac{n}{2}}$.

En utilisant la calculatrice, on constate que $u_n > 1000$ à partir de $n = 20$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} u_n > 1000 &\Leftrightarrow 2^{\frac{n}{2}} > 1000 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(2^{\frac{n}{2}}\right) > \ln(1000) \quad \text{car la fonction } \ln \text{ est croissante sur }]0; +\infty[. \\ &\Leftrightarrow \frac{n}{2} \times \ln(2) > \ln(1000) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{2 \ln(1000)}{\ln(2)}. \end{aligned}$$

Avec, $\frac{2 \ln(1000)}{\ln(2)} \approx 19,9$. Ceci conduit à la même conclusion.

3 ① La forme exponentielle est donnée par : $1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}.$

② **Initialisation** : L'égalité est vraie pour $n = 0$. En effet, $1 - (\sqrt{2})^0 e^{i \frac{0 \times \pi}{4}} = 1 - 1 = 0 = z_0$

Hérédité : Supposons que pour un entier k fixé, $z_k = 1 - (\sqrt{2})^k e^{i \frac{k\pi}{4}}$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= (1 + i)z_k - i \\ &= (1 + i) \left(1 - (\sqrt{2})^k e^{i \frac{k\pi}{4}} \right) - i \\ &= 1 + i - (\sqrt{2})^k (1 + i) e^{i \frac{k\pi}{4}} - i \\ &= 1 - (\sqrt{2})^k \times \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}} \times e^{i \frac{k\pi}{4}} \\ &= 1 - (\sqrt{2})^{k+1} e^{i \frac{(k+1)\pi}{4}}. \end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée et par conséquent l'égalité est donc vraie pour tout entier naturel n .

③ On a, $z_{2020} = 1 - (\sqrt{2})^{2020} e^{i \frac{2020\pi}{4}} = 1 - (\sqrt{2})^{2020} e^{i 505\pi} = 1 + \sqrt{2}^{2020} \in \mathbb{R}.$

Ainsi, le point A_{2020} appartient bel et bien à l'axe des abscisses.