

Exercice 1 : (2 points)

Effectuer, si cela est possible, les produits de matrices suivants.

$$\boxed{1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 : (4 points)

Dans chacun des cas suivants, déterminer la matrice inverse de A si cela est possible.

$$\boxed{1} A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{2} A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{3} A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{4} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 : (3 points)

Résoudre de façon matricielle les systèmes linéaires suivants. *On pourra effectuer les calculs à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel pour déterminer l'inverse des matrices utilisées.*

$$\boxed{1} \begin{cases} 5x + 4y = -1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}.$$

$$\boxed{2} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 3 \end{cases}.$$

Exercice 4 : (3 points)

On considère les matrices A , B et I :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - I.$$

$$\boxed{1} \text{ Calculer } B^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

$$\boxed{2} \text{ En déduire } A^n.$$

Exercice 5 : (3 points)

On considère la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{1} \text{ Montrer que } A^2 = 2I_3 - A.$$

$$\boxed{2} \text{ En déduire que } A \text{ est inversible et calculer } A^{-1}.$$

Exercice 6 : (5 points)

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par leur premier terme $u_0 = 2$ et $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = -u_n - 2v_n \end{cases}.$$

Pour tout entier naturel n , on définit la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

- 1** Écrire la matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$.
- 2** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $U_n = A^n U_0$.
- 3** On pose $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
 - a** Vérifier que $A = PDP^{-1}$.
 - b** En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que $A^n = PD^n P^{-1}$ pour $n \geq 0$.
- 4** Donner une expression de U_n en fonction de n , puis déduire celles de u_n et v_n , en fonction de n .