

Exercice 1 : (2 points)

$$\boxed{1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \times 1 + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 & (-1) \times (-1) + 1 \times 1 + (-1) \times (-1) \\ 1 \times 1 + (-1) \times (-1) + 1 \times 1 & 1 \times (-1) + (-1) \times 1 + 1 \times (-1) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 3 + 3 \times (-1) \\ -2 \times 3 + 4 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Ce produit est impossible à faire car le nombre de lignes de la première matrice est différent du nombre de colonnes de la seconde.}$$

$$\boxed{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-2) \times (-2) & 1 \times (-2) + (-2) \times (-1) \\ -2 \times 1 + (-1) \times (-2) & -2 \times (-2) + (-1) \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 : (4 points)

$$\boxed{1} A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\det(A) = ad - bc = 3 - (-24) = 27 \neq 0$ donc A^{-1} existe. Ainsi,

$$A^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{2} A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\det(A) = ad - bc = 1 - 1 = 0$ donc A n'est pas inversible.

$$\boxed{3} A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

$\det(A) = ad - bc = -35 - 4 = -39 \neq 0$ donc A est inversible et son inverse est :

$$A^{-1} = -\frac{1}{39} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{39} \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{4} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\det(A) = ad - bc = 0 - 1 = -1 \neq 0$ donc A est inversible et son inverse est :

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

Exercice 3 : (3 points)

$$\boxed{1} \begin{cases} 5x + 4y = -1 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \iff AX = B, \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A) = 5 \times (-1) + 4 \times 3 = -5 - 12 = -17.$$

Étant donné que $\det(A) \neq 0$, A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{17} & \frac{4}{17} \\ \frac{3}{17} & -\frac{5}{17} \end{pmatrix}$.

Ainsi, $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{17} & \frac{4}{17} \\ \frac{3}{17} & -\frac{5}{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{17} \\ -\frac{13}{17} \end{pmatrix}$.

Par conséquent, $x = \frac{7}{17}$ et $y = -\frac{13}{17}$.

2 $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 3 \end{cases} \iff AX = B$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, $x = \frac{5}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$ et $z = -1$.

Exercice 4 : (3 points)

On considère les matrices A , B et I :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - I.$$

1 Il est assez aisé de calculer B^2 et B^3 .

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 3$, on a $B^n = B^3 \times B^{n-3} = 0$.

2 Pour obtenir A , on écrit $A = I + B$.

Or, I et B commutent puisque $IB = BI = B$. Donc, on peut appliquer la formule du binôme de Newton. On obtient alors :

$$A^n = I^n + \binom{n}{1} I^{n-1} B + \binom{n}{2} I^{n-2} B^2,$$

puisque $B^n = 0$ dès que $n \geq 3$. Ainsi,

$$A^n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2.$$

Autrement dit,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 : (3 points)

On considère la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1 D'une part, $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

D'autre part, $2I_3 - A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

D'où, $A^2 = 2I_3 - A$.

2 D'après la question précédente, on a : $A^2 + A = 2I_3$. Autrement dit, $\frac{1}{2} [A^2 + A] = I_3$.
Par ailleurs,

$$A \times \frac{1}{2} [A + I_3] = \frac{1}{2} [A + I_3] \times A = I_3.$$

Ainsi, A est inversible, et son inverse est :

$$\frac{1}{2} [A + I_3] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 : (5 points)

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par leur premier terme $u_0 = 2$ et $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = -u_n - 2v_n \end{cases}.$$

1 Il est assez aisé de voir que :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = -u_n - 2v_n \end{cases} \Leftrightarrow U_{n+1} = AU_n, \text{ avec } U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

2 Pour tout entier naturel n , on considère la proposition $\mathcal{P}(n) : U_n = A^n U_0$.

— **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a : $A^0 U_0 = I_2 U_0 = U_0$. Ainsi, l'initialisation est réalisée.

— **Hérédité** : Soit n un entier naturel, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée?

Par hypothèse de récurrence, on a : $U_n = A^n U_0$.

Ainsi, $U_{n+1} = AU_n = A \times A^n U_0 = A^{n+1} U_0$.

L'hérédité est alors vérifiée.

— **Conclusion** : Selon le principe de récurrence, on déduit que pour tout entier naturel n , $U_n = A^n U_0$.

3 **a** $PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = A$ (avec la calculatrice).

b Pour tout entier naturel n , on considère la proposition $\mathcal{P}'(n) : A^n = P^{-1} D^n P$.

— **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a : $P^{-1} D^0 P = P^{-1} I_2 P = P^{-1} P = I_2 = A^0$.

Ainsi, $\mathcal{P}'(0)$ est vraie.

— **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}'(n)$ est vraie pour un certain n et montrons que

$\mathcal{P}'(n+1)$ est vérifiée.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= P D^n \underbrace{P^{-1} P}_{=I} D P^{-1} \\ &= P D^{n+1} P^{-1}. \end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée.

— **Conclusion :** Selon le principe récurrence, on déduit que la proposition est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

4 Notons que $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$. On sait que : $U_n = A^n U_0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} U_n &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{(-1)^{n+1}}{2} & \frac{3(-1)^{n+1}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{2} & \frac{3}{2} + \frac{3(-1)^{n+1}}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{3(-1)^n}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{9}{2} + \frac{5(-1)^{n+1}}{2} \\ -\frac{3}{2} + \frac{5(-1)^n}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout entier naturel n ,

$$U_n = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} + \frac{5(-1)^{n+1}}{2} \\ -\frac{3}{2} + \frac{5(-1)^n}{2} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit,

$$\boxed{u_n = \frac{9}{2} + \frac{5(-1)^{n+1}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{v_n = -\frac{3}{2} + \frac{5(-1)^n}{2}}.$$