Devoir Surveillé n° 1

Maths Expertes

Durée **1h30** | Calculatrice **autorisée** | Barème 20 **pts**

Consignes. Toute réponse doit être justifiée. Les résultats sont à encadrer. La présentation et la rédaction sont prises en compte dans la notation.

Note / 20

Nom, prénom _____

Classe _____ Date _____

Exercice 1 • Forme algébrique d'un nombre complexe & Conjugué (3 pts)

Mettre les conjugués des deux nombres complexes suivants sous la forme algébrique.

1. $z_1 = \left(\dfrac{1}{1-i}\right)^3$.

2. $z_2 = \dfrac{2+i}{3-i} + \dfrac{5}{1+i}$.

Exercice 2 • Automatismes (4 pts)

Les quatre questions sont indépendantes.

1. Donner la forme algébrique de la somme :

$$S = \sum_{k=0}^{125} i^k = 1 + i + i^2 + \cdots + i^{125}.$$

2. Donner la forme algébrique de : $(1-i)^5$.

3. Donner une forme algébrique de : $\sqrt{3-4i}$.

4. Résoudre le système suivant, d'inconnues complexes z_1 et z_2 :

$$\begin{cases} 3z_1 + 2z_2 &= 7+i \\ z_1 - 2z_2 &= -3-5i \end{cases}$$

Exercice 3 • Partie réelle et partie imaginaire d'un nombre complexe (2 pts)

Soit x un réel et $z = 3x - 2 + i(x^2 - 4x + 3)$.

1. Déterminer la valeur de x pour laquelle z est un imaginaire pur. Que vaut alors z ?

2. Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles z est réel ? Que vaut alors z ?

Exercice 4 • Équation du premier degré (2,5 pts)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les deux équations suivantes en donnant la solution sous forme algébrique.

1. $4z - 2 = iz + 3 + 2i$.

2. $3iz - \overline{z} + 1 = 5 + 2\overline{z} - i$.

Exercice 5 • Équation du second degré (2,5 pts)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les deux équations suivantes en donnant les solutions sous la forme algébrique.

1. $3z^2 - 4z + 2 = 0$.

2. $z^2 - 2\overline{z} + 2 = 0$.

Exercice 6 • Polynôme de degré 3 (3 pts)

On considère la fonction f définie, pour tout complexe z, par :

$$f(z) = z^3 - (3+i)z^2 + (2+3i)z - 2i.$$

1. Montrer que i est une racine de f.

2. Déterminer les réels a et b tels que : $f(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$.

3. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = 0$.

Exercice 7 • Suites numériques (3 pts)

Soit la suite de nombres complexes (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} z_0 = 2 \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}z_n + \dfrac{1}{2}i \end{cases}$

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = z_n - i$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de (u_n).

2. Déterminer u_n puis z_n en fonction de n.