Corrigé : Devoir Surveillé n° 1
Maths Expertes

Durée **1h30** | Calculatrice **autorisée** | Barème 20 **pts**

Consignes. Toute réponse doit être justifiée. Les résultats sont à encadrer. La présentation et la rédaction sont prises en compte dans la notation.

Note / 20

Nom, prénom _____

Classe _____ Date _____

Exercice 1 • Forme algébrique d'un nombre complexe & Conjugué (3 pts)

On rappelle que, pour tout nombre complexe $z = a + ib$: $\overline{z} = a - ib$.

1. $z_1 = \left(\dfrac{1}{1-i}\right)^3$.

$$\begin{aligned}
\overline{z_1} &= \overline{\left(\frac{1}{1-i}\right)^3} \\
&= \left(\overline{\frac{1}{1-i}}\right)^3 \\
&= \left(\frac{1}{\overline{1-i}}\right)^3 \\
&= \left(\frac{1}{1+i}\right)^3 \\
&= \left(\frac{1-i}{1+i^2}\right)^3 \\
&= \left(\frac{1-i}{2}\right)^3 \\
&= \frac{(1-i)^3}{8}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
(1-i)^2 &= 1 - 2i + i^2 \\
&= -2i.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}(1-i)^3 &= -2i(1-i)\\ &= -2i+2i^2\\ &= -2-2i.\end{aligned}$$

En conséquence,

$$\boxed{\overline{z_1} = -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i}.$$

2. $z_2 = \dfrac{2+i}{3-i}+\dfrac{5}{1+i}$.

$$\begin{aligned}\overline{z_2} &= \overline{\frac{2+i}{3-i}}+\overline{\frac{5}{1+i}}\\ &= \frac{2-i}{3+i}+\frac{5}{1-i}.\end{aligned}$$

Déterminons la forme algébrique de chaque terme.

$$\begin{aligned}\frac{2-i}{3+i} &= \frac{(2-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}\\ &= \frac{6-2i-3i+i^2}{10}\\ &= \frac{5-5i}{10}\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\frac{5}{1-i} &= \frac{5(1+i)}{(1-i)(1+i)}\\ &= \frac{5(1+i)}{2}\\ &= \frac{5}{2}+\frac{5}{2}i.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\overline{z_2} &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i\\ &= 3+2i.\end{aligned}$$

En conséquence,

$$\boxed{\overline{z_2} = 3+2i}.$$

Exercice 2 • Automatismes (4 pts)

Les quatre questions sont indépendantes.

1. La forme algébrique de la somme :

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=0}^{125} i^k \\
&= 1 + i + i^2 + \cdots + i^{125} \\
&= \frac{i^{126} - 1}{i - 1} \\
&= \frac{i^{4\times 31+2} - 1}{i - 1} \quad \text{car,} \quad 126 = 4 \times 31 + 2 \\
&= \frac{(i^4)^{31} \times i^2 - 1}{i - 1} \\
&= \frac{-1 - 1}{i - 1} \quad \text{car,} \quad i^4 = 1 \ \text{ et } \ i^2 = -1 \\
&= \frac{-2}{i - 1} \\
&= \frac{-2(-i - 1)}{(i - 1)(-i - 1)} \\
&= \frac{2i + 2}{2} \\
&= 1 + i.
\end{aligned}$$

2. La forme algébrique :

$$\begin{aligned}
(1 - i)^5 &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} 1^{5-k}(-i)^k \\
&= 1 - 5i + 10(-i)^2 + 10(-i)^3 + 5(-i)^4 + (-i)^5 \\
&= 1 - 5i - 10 + 10i + 5 - i \\
&= -4 + 4i.
\end{aligned}$$

3. Déterminons une racine carrée de $3 - 4i$.

Posons $z = a + ib$, où a et b sont deux réels. On cherche z tel que $z^2 = 3 - 4i$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
3 - 4i = (a + ib)^2 &\Leftrightarrow 3 - 4i = a^2 - b^2 + 2abi \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ ab = -2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ b = -\dfrac{2}{a}, \quad \text{avec } a \neq 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \dfrac{4}{a^2} = 3 \\ b = -\dfrac{2}{a}, \quad \text{avec } a \neq 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 3a^2 - 4 = 0 \\ b = -\dfrac{2}{a}, \quad \text{avec } a \neq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Posons $X = a^2$. On obtient alors :

$$X^2 - 3X - 4 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est égal à :

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25.$$

Δ étant positif, cette équation admet deux solutions :

$$X_1 = \frac{3 - 5}{2} = -1 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{3 + 5}{2} = 4.$$

Or, $X = a^2 \geq 0$. Donc, $a^2 = 4$, d'où :

$$a = 2 \quad \text{ou} \quad a = -2.$$

Si $a = 2$, alors $b = -\dfrac{2}{2} = -1$.

Si $a = -2$, alors $b = -\dfrac{2}{-2} = 1$.

Par conséquent, les deux racines carrées de $3 - 4i$ sont :

$$\boxed{2 - i \quad \text{et} \quad -2 + i}.$$

On peut vérifier que :

$$(2 - i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 3 - 4i.$$

Attention ! La notation $\sqrt{3 - 4i}$ est à utiliser avec précaution. En effet, contrairement aux nombres réels positifs, un nombre complexe non nul possède deux racines carrées opposées dans $\mathbb{C}$. Il est donc préférable de préciser que l'on cherche une racine carrée de $3 - 4i$.

4. z_1 et z_2 sont deux nombres complexes :

$$\begin{cases} 3z_1+2z_2 &= 7+i \\ z_1-2z_2 &= -3-5i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3z_1+2z_2 &= 7+i & L_1 \\ z_1-2z_2 &= -3-5i & L_2 \end{cases}$$

$L_1+L_2 \Longrightarrow 4z_1 = 4-4i \Longrightarrow z_1 = 1-i.$
$L_1-3L_2 \Longrightarrow 8z_2 = 16i+16 \Longrightarrow z_2 = 2+2i.$
Ainsi,

$$\boxed{S=\{(1-i\,;\,2+2i)\}}.$$

Exercice 3 • Partie réel et partie imaginaire d'un nombre complexe (2 pts)

Soit x un réel et $z = 3x-2+i(x^2-4x+3)$.

1. z est un imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle. Autrement dit,

$$\begin{aligned} z \text{ est un imaginaire pur} &\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=0 \\ &\Leftrightarrow 3x-2=0 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Dès lors, pour $x=\dfrac{2}{3}$:

$$\begin{aligned} z &= 3\times\frac{2}{3}-2+i\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2-4\times\frac{2}{3}+3\right] \\ &= 0+i\left[\frac{4}{9}-\frac{8}{3}+3\right] \\ &= i\left[\frac{4}{9}-\frac{24}{9}+\frac{27}{9}\right] \\ &= \frac{7}{9}i. \end{aligned}$$

2. z est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle. Autrement dit,

$$\begin{aligned} z \text{ est réel} &\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=0 \\ &\Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x-3)=0. \end{aligned}$$

Ainsi, z est un réel lorsque,

$$x=1 \quad \text{ou} \quad x=3.$$

Dès lors, pour $x=1$:

$$z=3\times1-2=1.$$

Et, pour $x=3$:

$$z=3\times3-2=7.$$

Exercice 4 • Équation du premier degré (2,5 pts)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les deux équations suivantes.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} 4z-2=iz+3+2i &\Leftrightarrow 4z-iz=5+2i \\ &\Leftrightarrow (4-i)z=5+2i \\ &\Leftrightarrow z=\frac{5+2i}{4-i} \\ &\Leftrightarrow z=\frac{(5+2i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \\ &\Leftrightarrow z=\frac{20+5i+8i+2i^2}{16-i^2} \\ &\Leftrightarrow z=\frac{18+13i}{17}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{S=\left\{\frac{18}{17}+\frac{13}{17}i\right\}}.$$

2. Posons, $z=a+ib$. Ainsi, $\overline{z}=a-ib$, avec $a,b\in\mathbb{R}$. Dès lors,

$$\begin{aligned} 3iz-\overline{z}+1=5+2\overline{z}-i &\Leftrightarrow 3i(a+ib)-(a-ib)+1=5+2(a-ib)-i \\ &\Leftrightarrow 3ia-3b-a+ib+1=5+2a-2ib-i. \end{aligned}$$

L'unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe entraine alors :

$$\begin{cases} -3b-a+1=5+2a \\ 3a+b=-2b-1. \end{cases}$$

La première équation donne :

$$3a+3b=-4.$$

La seconde donne :

$$3a+3b=-1.$$

C'est contardictoire. Ainsi, cette équation n'admet aucune solution. Autrement dit,

$$\boxed{\mathcal{S}=\varnothing}.$$

Exercice 5 • Équation du second degré (2,5 pts)

1. Le discriminant de l'équation $3z^2-4z+2=0$ est égal à :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (-4)^2 - 4\times 3\times 2\\ &= 16 - 24\\ &= -8.\end{aligned}$$

Δ étant strictement négatif, cette équation admet deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$z_1 = \frac{4 - i\sqrt{8}}{6} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{4 + i\sqrt{8}}{6}.$$

Ainsi,

$$S = \left\{\frac{2 - i\sqrt{2}}{3}\ ;\ \frac{2 + i\sqrt{2}}{3}\right\}.$$

2. Posons $z = a + ib$, avec a et b deux réels. Ainsi,

$$\begin{aligned}z^2 - 2\overline{z} + 2 = 0 &\Leftrightarrow (a+ib)^2 - 2(a-ib) + 2 = 0\\ &\Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab - 2a + 2ib + 2 = 0\\ &\Leftrightarrow a^2 - b^2 - 2a + 2 + i(2ab + 2b) = 0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 - 2a + 2 = 0\\ 2ab + 2b = 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 - 2a + 2 = 0\\ b(2a + 2) = 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 - 2a + 2 = 0\\ b = 0 \ \text{ ou } \ a = -1\end{cases}\end{aligned}$$

Dès lors, si $b = 0$, alors :

$$a^2 - 2a + 2 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est égal à :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-2)^2 - 4\times 1\times 2\\ &= 4 - 8\\ &= -4.\end{aligned}$$

Cependant, Δ étant négatif, cette équation ne possède aucune solution réelle. Donc, ce cas ne donne aucune solution.
Et, si $a = -1$, alors :

$$\begin{aligned}(-1)^2 - b^2 - 2(-1) + 2 = 0 &\Leftrightarrow 1 - b^2 + 2 + 2 = 0\\ &\Leftrightarrow 5 - b^2 = 0\\ &\Leftrightarrow b^2 = 5\\ &\Leftrightarrow b = \sqrt{5} \ \text{ ou } \ b = -\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Par conséquent, les deux solutions sont :

$$z = -1 + i\sqrt{5} \quad \text{ou} \quad z = -1 - i\sqrt{5}.$$

Ainsi,

$$\boxed{S = \left\{-1 + i\sqrt{5}\ ;\ -1 - i\sqrt{5}\right\}.}$$

Exercice 6 • Polynôme de degré 3 (3 pts)

1. i est une racine de f. En effet,

$$\begin{aligned} f(i) &= i^3 - (3+i)i^2 + (2+3i)i - 2i \\ &= -i - (3+i)(-1) + 2i + 3i^2 - 2i \\ &= -i + 3 + i + 2i - 3 - 2i \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Soient a et b deux nombres complexes :

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-i)(z^2+az+b) \\ &= z^3 + az^2 + bz - iz^2 - iaz - ib \\ &= z^3 + (a-i)z^2 + (b-ia)z - ib. \end{aligned}$$

Ainsi, par principe d'identification des coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} a - i = -(3+i) \\ b - ia = 2 + 3i \\ -ib = -2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b - i(-3) = 2 + 3i \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b + 3i = 2 + 3i \\ b = 2 \end{cases}.$$

Ainsi,

$$\boxed{f(z) = (z-i)(z^2 - 3z + 2)}.$$

3. Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} f(z) = 0 &\Leftrightarrow (z-i)(z^2-3z+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = i \text{ ou } z^2 - 3z + 2 = 0. \quad (E) \end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation (E) est égal à :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 \\ &= 9 - 8 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Δ étant positif, l'équation (E) admet deux solutions réelles, donc complexes :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{3 - \sqrt{1}}{2} = \frac{3-1}{2} = 1, \\ z_2 &= \frac{3 + \sqrt{1}}{2} = \frac{3+1}{2} = 2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{S = \{i \ ; \ 1 \ ; \ 2\}}.$$

Exercice 7 • Suites numériques (3 pts)

Soit la suite de nombres complexes (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} z_0 = 2 \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}z_n + \dfrac{1}{2}i \end{cases}$$

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = z_n - i$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= z_{n+1} - i \\ &= \frac{1}{2}z_n + \frac{1}{2}i - i \\ &= \frac{1}{2}z_n - \frac{1}{2}i \\ &= \frac{1}{2}(z_n - i) \\ &= \frac{1}{2}u_n. \end{aligned}$$

Ce qui implique que, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n.$$

Autrement dit, (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme :

$$u_0 = z_0 - i = 2 - i.$$

2. La suite (u_n) étant géométrique, nous pouvons alors l'écrire sous la forme :

$$u_n = u_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ainsi,

$$\boxed{u_n = (2-i)\left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$

Dès lors, on peut déduire l'expression explicite de z_n en fonction de n :

$$\begin{aligned} z_n &= u_n + i \\ &= (2-i)\left(\frac{1}{2}\right)^n + i. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{z_n = \frac{1}{2^{n-1}} + \left(-\frac{1}{2^n} + 1\right)i.}$$