

Exercice 1 : (3 points)

Mettre les conjugués des deux nombres complexes suivants sous la forme algébrique.

$$\boxed{1} \quad z_1 = \left(\frac{1}{1+i} \right)^2.$$

$$\boxed{2} \quad z_2 = \frac{1-i}{5+i} + \frac{7}{1-i}.$$

Exercice 2 : (4 points)

Les quatre questions sont indépendantes.

$$\boxed{1} \quad \text{Donner la forme algébrique de la somme : } S = \sum_{k=0}^{143} i^k = 1 + i + i^2 + \dots + i^{143}.$$

$$\boxed{2} \quad \text{Donner la forme algébrique de : } (1+i)^5.$$

$$\boxed{3} \quad \text{Donner une forme algébrique de : } \sqrt{2i+1}.$$

$$\boxed{4} \quad \text{Résoudre le système suivant, d'inconnues complexes } z_1 \text{ et } z_2 :$$

$$\begin{cases} 2z_1 + 3z_2 &= 5 - 3i \\ z_1 - 3z_2 &= 4 + 6i \end{cases}.$$

Exercice 3 : (2 points)

Soit x un réel et $z = 2x - 1 + i(2x^2 + 5x - 2)$

$$\boxed{1} \quad \text{Déterminer la valeur de } x \text{ pour laquelle } z \text{ est un imaginaire pur. Que vaut alors } z?$$

$$\boxed{2} \quad \text{Existe-t-il des valeurs de } x \text{ pour lesquelles } z \text{ est réel? Que vaut alors } z?$$

Exercice 4 : (2,5 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les deux équations suivantes en donnant les solutions sous forme algébrique.

$$\boxed{1} \quad -6z + 3 = iz + 1 - 5i.$$

$$\boxed{2} \quad -2iz + \bar{z} - 3 = 7 - \bar{z} + 53i.$$

Exercice 5 : (2,5 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les deux équations suivantes en donnant les solutions sous la forme algébrique.

$$\boxed{1} \quad 2z^2 - 3z + 5 = 0.$$

$$\boxed{2} \quad z^2 + 3\bar{z} - 1 = 0.$$

Exercice 6 : (3 points)

On pose pour tout complexe z : $f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$.

$$\boxed{1} \quad \text{Montrer } 2i \text{ est une racine de } f.$$

$$\boxed{2} \quad \text{Déterminer les réels } a \text{ et } b \text{ tels que : } f(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b).$$

$$\boxed{3} \quad \text{Résoudre alors dans } \mathbb{C}, \text{ l'équation : } f(z) = 0.$$

Exercice 7 : (3 points)

Soit la suite de nombres complexes (z_n) définie dans $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}i \end{cases} .$$

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = z_n - i$.

- 1** Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . En déduire la nature de (u_n) .
- 2** Déterminer u_n puis z_n en fonction de n .