

Exercice 1 : (3 points)

La forme algébrique des conjugués.

1

$$\begin{aligned}\overline{z_1} &= \overline{\left(\frac{1}{1+i}\right)^2} \\ &= \left(\overline{\frac{1}{1+i}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{\overline{1+i}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{1-i}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1+i}{1^2-i^2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1+i}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1^2+2i+i^2}{4} \\ &= \frac{1}{2}i.\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}\overline{z_2} &= \overline{\frac{1-i}{5+i} + \frac{7}{1-i}} \\ &= \overline{\frac{1-i}{5+i}} + \overline{\frac{7}{1-i}} \\ &= \frac{1+i}{5-i} + \frac{7}{1+i} \\ &= \frac{(1+i)(5+i)}{26} + \frac{7(1-i)}{2} \\ &= \frac{(1+i)(5+i)}{26} + \frac{13 \times 7(1-i)}{26} \\ &= \frac{5+i+5i-1+91-91i}{26} \\ &= \frac{95-85i}{26}.\end{aligned}$$

Exercice 2 : (4 points)

Les trois questions sont indépendantes.

1 La forme algébrique de la somme :

$$\begin{aligned}S &= \sum_{k=0}^{143} i^k = 1 + i + i^2 + \dots + i^{143} \\ &= \frac{i^{144} - 1}{i - 1} \\ &= \frac{(i^2)^{72} - 1}{i - 1} \\ &= \frac{(-1)^{72} - 1}{i - 1} \\ &= 0.\end{aligned}$$

2 La forme algébrique :

$$\begin{aligned}(1+i)^5 &= 1^5 + 5 \times 1^4 \times i + 10 \times 1^3 \times i^2 + 10 \times 1^2 \times i^3 + 5 \times 1 \times i^4 + i^5 \\ &= 1 + 5i - 10 - 10i + 5 + i \\ &= -4 - 4i.\end{aligned}$$

3 Posons : $\sqrt{2i+1} = a + ib$, a et b deux réels. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 2i + 1 &= (a + ib)^2 \Leftrightarrow 2i + 1 = a^2 - b^2 + 2abi \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 &= 1 \\ 2ab &= 2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 &= 1 \\ ab &= 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 &= 1 \\ b &= \frac{1}{a}, \text{ avec } a \neq 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{1}{a^2} &= 1 \\ b &= \frac{1}{a} \text{ avec } a \neq 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 1 &= a^2 \\ b &= \frac{1}{a} \text{ avec } a \neq 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - a^2 - 1 &= 0 \\ b &= \frac{1}{a} \text{ avec } a \neq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Posons $X = a^2$. On obtient alors : $X^2 - X - 1 = 0$. Le discriminant de cette équation est égal à : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$. Δ étant positif, cette équation admet deux solutions :

$$X_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } X_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \text{ Or, } X > 0. \text{ Donc, } a^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Autrement dit, } a = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \text{ ou } a = -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

$$\text{Par conséquent, } \sqrt{2i+1} = \pm \left(\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} + \frac{i}{\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}} \right).$$

Attention ! Cette notation $\sqrt{2i+1}$ est fortement déconseillée. Car, déterminer la racine carrée d'un nombre complexe z revient à résoudre l'équation $z^2 = a + ib$ et cette équation admet deux solutions dans $\mathbb{C}$.

Par ailleurs, la forme algébrique d'un nombre complexe est unique, donc cette écriture

$$\sqrt{2i+1} = \pm \left(\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} + \frac{i}{\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}} \right) \text{ n'est pas correcte.}$$

Une fois que vous avez compris cela, vous pouvez utiliser quand même cette notation pour aller un peu plus vite dans le raisonnement.

4 z_1 et z_2 sont deux nombres complexes :

$$\begin{cases} 2z_1 + 3z_2 &= 5 - 3i & L_1 \\ z_1 - 3z_2 &= 4 + 6i & L_2 \end{cases}.$$

$$L_1 + L_2 \Rightarrow 3z_1 = 9 + 3i \Rightarrow z_1 = 3 + i.$$

$$L_1 - 2L_2 \Rightarrow 9z_2 = -3 - 15i \Rightarrow z_2 = -\frac{1}{3} - \frac{5}{3}i.$$

$$\text{Ainsi, } S = \left\{ 3 + i ; -\frac{1}{3} - \frac{5}{3}i \right\}.$$

Exercice 3 : (2 points)

Soit x un réel et $z = 2x - 1 + i(2x^2 + 5x - 2)$.

1

$$\begin{aligned} z \text{ est un imaginaire pur} &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } z = \left(2 \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 5 \times \frac{1}{2} - 2 \right) i = 1 \times i = i.$$

2

$$\begin{aligned} z \text{ est réel} &\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 2 = 0. \quad (E) \end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation (E) est égal à : $\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25 + 16 = 41$.

Δ étant positif, cette équation admet deux solutions : $x_1 = \frac{-5 - \sqrt{41}}{4}$ et $x_2 = \frac{-5 + \sqrt{41}}{4}$.

Par conséquent, il existe deux valeurs de x pour lesquelles z est un réel :

$$z_1 = \frac{-5 - \sqrt{41}}{2} - 1 = \frac{-7 - \sqrt{41}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-5 + \sqrt{41}}{2} - 1 = \frac{-7 + \sqrt{41}}{2}.$$

Exercice 4 : (2,5 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les deux équations suivantes en donnant la solution sous forme algébrique.

1 Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} -6z + 3 &= iz + 1 - 5i &\Leftrightarrow -6z - iz &= 1 - 5i - 3 \\ &&\Leftrightarrow (-6 - i)z &= -5i - 2 \\ &&\Leftrightarrow z &= \frac{-5i - 2}{-6 - i} \\ &&\Leftrightarrow z &= \frac{5i + 2}{6 + i} \\ &&\Leftrightarrow z &= \frac{(5i + 2)(6 - i)}{(6 + i)(6 - i)} \\ &&\Leftrightarrow z &= \frac{30i + 5 + 12 - 2i}{6^2 - i^2} \\ &&\Leftrightarrow z &= \frac{17 + 28i}{37}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } S = \left\{ \frac{17}{37} + \frac{28}{37}i \right\}.$$

2 Posons, $z = a + ib$. Ainsi,

$$\begin{aligned} -2i(a + ib) + (a - ib) - 3 &= 7 - (a - ib) + 53i &\Leftrightarrow -2ia + 2b + a - ib - 3 &= 7 - a + ib + 53i \\ &&\Leftrightarrow 2b + 2a - 10 + i(-2a - 2b - 53) &= 0 \\ &&\Leftrightarrow \begin{cases} 2b + 2a - 10 = 0 & L_1 \\ -2a - 2b - 53 = 0 & L_2 \end{cases} \\ &&\Leftrightarrow \begin{cases} 2b + 2a = 10 & L_1 \\ 2a + 2b = 53 & L_2 \end{cases} \end{aligned}$$

C'est absurde. Cette équation n'admet pas de solution. Donc, $S = \emptyset$.

Exercice 5 : (2,5 points)

- 1 Le discriminant de l'équation $2z^2 - 3z + 5 = 0$ est égal à :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-3)^2 - 4 \times 2 \times 5 \\ &= 9 - 40 \\ &= -31.\end{aligned}$$

Δ étant négatif, cette équation admet deux solutions dans $\mathbb{C}$: $z_1 = \frac{3 - i\sqrt{31}}{4}$ et $z_2 = \frac{3 + i\sqrt{31}}{4}$.

Ainsi, $S = \left\{ \frac{3 - i\sqrt{31}}{4} ; \frac{3 + i\sqrt{31}}{4} \right\}$.

- 2 Posons $z = a + ib$. Ainsi,

$$\begin{aligned}z^2 + 3\bar{z} - 1 = 0 &\Leftrightarrow (a + ib)^2 + 3(a - ib) - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab + 3a - 3ib - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 - b^2 + 3a - 1 + i(2ab - 3b) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 3a - 1 = 0 \\ 2ab - 3b = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 3a - 1 = 0 \\ b = 0 \text{ ou } 2a - 3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 3a - 1 = 0 \\ b = 0 \text{ ou } a = \frac{3}{2} \end{cases}\end{aligned}$$

Si $b = 0$, alors $a^2 + 3a - 1 = 0$ (*). Le discriminant de l'équation (*) est égal à :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (3)^2 - 4 \times 1 \times (-1) \\ &= 9 + 4 \\ &= 13.\end{aligned}$$

Ainsi, $a_1 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$ et $a_2 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$.

Si $a = \frac{3}{2}$ alors $\left(\frac{3}{2}\right)^2 - b^2 + 3 \times \frac{3}{2} - 1 = 0$. Ce qui implique que : $b^2 = \frac{9}{4} + \frac{9}{2} - 1 = \frac{23}{4}$. Autrement dit, $b = \frac{\sqrt{23}}{2}$ ou $b = -\frac{\sqrt{23}}{2}$.

Par conséquent, $S = \left\{ \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} ; \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} ; \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{23}}{2}i ; \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{23}}{2}i \right\}$.

Exercice 6 : (3 points)

On pose pour tout complexe z : $f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$.

1 $2i$ est une racine de f . En effet,

$$\begin{aligned}f(2i) &= (2i)^3 - 2(\sqrt{3} + i) \times (2i)^2 + 4(1 + i\sqrt{3}) \times 2i - 8i \\&= -8i + 8(\sqrt{3} + i) + 8i(1 + i\sqrt{3}) - 8i \\&= -8i + 8\sqrt{3} + 8i + 8i - 8\sqrt{3} - 8i \\&= 0.\end{aligned}$$

2 Soit a et b deux réels :

$$\begin{aligned}f(z) &= (z - 2i)(z^2 + az + b) \\&= z^3 + az^2 + bz - 2iz^2 - 2iaz - 2ib \\&= z^3 + (a - 2i)z^2 + (b - 2ia)z - 2ib\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} a - 2i = -2(\sqrt{3} + i) \\ b - 2ia = 4(1 + i\sqrt{3}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2\sqrt{3} \\ b = 4 \end{cases}.$$

3 Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}f(z) = 0 &\Leftrightarrow (z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0 \\&\Leftrightarrow z = 2i \text{ ou } z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0. \quad (E)\end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation (E) est égal à :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 \times 3 - 4 \times 1 \times 4 = -4.$$

Δ étant négatif, l'équation (E) admet deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$z_1 = \frac{2\sqrt{3} - 2i}{2} = \sqrt{3} - i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i.$$

Ainsi, $S = \{2i ; \sqrt{3} - i ; \sqrt{3} + i\}$.

Exercice 7 : (3 points)

Soit la suite de nombres complexes (z_n) définie dans $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}i \end{cases}$.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = z_n - i$.

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= z_{n+1} - i \\&= \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}i - i \\&= \frac{1}{3}z_n - \frac{1}{3}i \\&= \frac{1}{3}(z_n - i) \\&= \frac{1}{3}u_n.\end{aligned}$$

Ce qui implique que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3}$. Autrement dit, (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

2 La suite (u_n) étant géométrique, nous pouvons alors l'écrire sous la forme :

$$u_n = u_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n = (1-i) \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Dès lors,

$$z_n = u_n + i = (1-i) \left(\frac{1}{3}\right)^n + i.$$