

Exercice 1 : (4 points)

Voici la forme algébrique de chaque nombre.

1

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{5+9i} \\ &= \frac{5-9i}{(5+9i)(5-9i)} \\ &= \frac{5-9i}{5^2 - (9i)^2} \\ &= \frac{5-9i}{25+81} \\ &= \frac{5-9i}{106} \\ &= \frac{5}{106} - \frac{9}{106}i. \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{2-3i}{8+6i} \\ &= \frac{(2-3i)(8-6i)}{(8+6i)(8-6i)} \\ &= \frac{16-12i-24i-18}{8^2 - (6i)^2} \\ &= \frac{-2-36i}{64+36} \\ &= \frac{-2-36i}{100} \\ &= -\frac{1}{50} - \frac{9}{25}i. \end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned} Z &= \left(\frac{1}{1-i} \right)^2 \\ &= \frac{1}{(1-i)^2} \\ &= \frac{1}{1-2i+i^2} \\ &= \frac{1}{1-2i-1} \\ &= \frac{1}{-2i} \\ &= \frac{i}{-2i^2} \\ &= \frac{i}{2}. \end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned} z &= \frac{1-i}{3+i} + \frac{2}{1-i} \\ &= \frac{(1-i)^2}{(3+i)(1-i)} + \frac{2(3+i)}{(1-i)(3+i)} \\ &= \frac{1-2i+i^2+6+2i}{(3+i)(1-i)} \\ &= \frac{1-2i+i^2+6+2i}{3-3i+i+1} \\ &= \frac{6}{4-2i} \\ &= \frac{3}{2-i} \\ &= \frac{3(2+i)}{5} \\ &= \frac{6}{5} + \frac{3}{5}i. \end{aligned}$$

Exercice 2 : (3 points)

Posons, $z = x + iy$. Pour tout complexe $z \neq -1$,

$$\begin{aligned} Z &= \frac{z+1}{\bar{z}+1} \\ &= \frac{x+iy+1}{x-iy+1} \\ &= \frac{x+1+iy}{x+1-iy} \\ &= \frac{(x+1+iy)^2}{(x+1-iy)(x+1+iy)} \\ &= \frac{(x+1)^2 + 2y(x+1)i - y^2}{(x+1)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\Re(Z) = \frac{(x+1)^2 - y^2}{(x+1)^2 + y^2}$ et $\Im(Z) = \frac{2y(x+1)}{(x+1)^2 + y^2}$.

1

$$\begin{aligned} Z \text{ est un réel} &\Leftrightarrow \Im(Z) = 0 \\ &\Leftrightarrow y(x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x+1 = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = -1. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions est égal à : $S_1 = \{(x,0)|x \in \mathbb{R}/\{-1\}\} \cup \{(-1;y)|y \in \mathbb{R}^*\}$.

Ce sont donc deux droites, la première est l'axe des abscisses privé du point de coordonnées $(-1;0)$ et la seconde est la parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point de coordonnées $(-1;0)$.

2

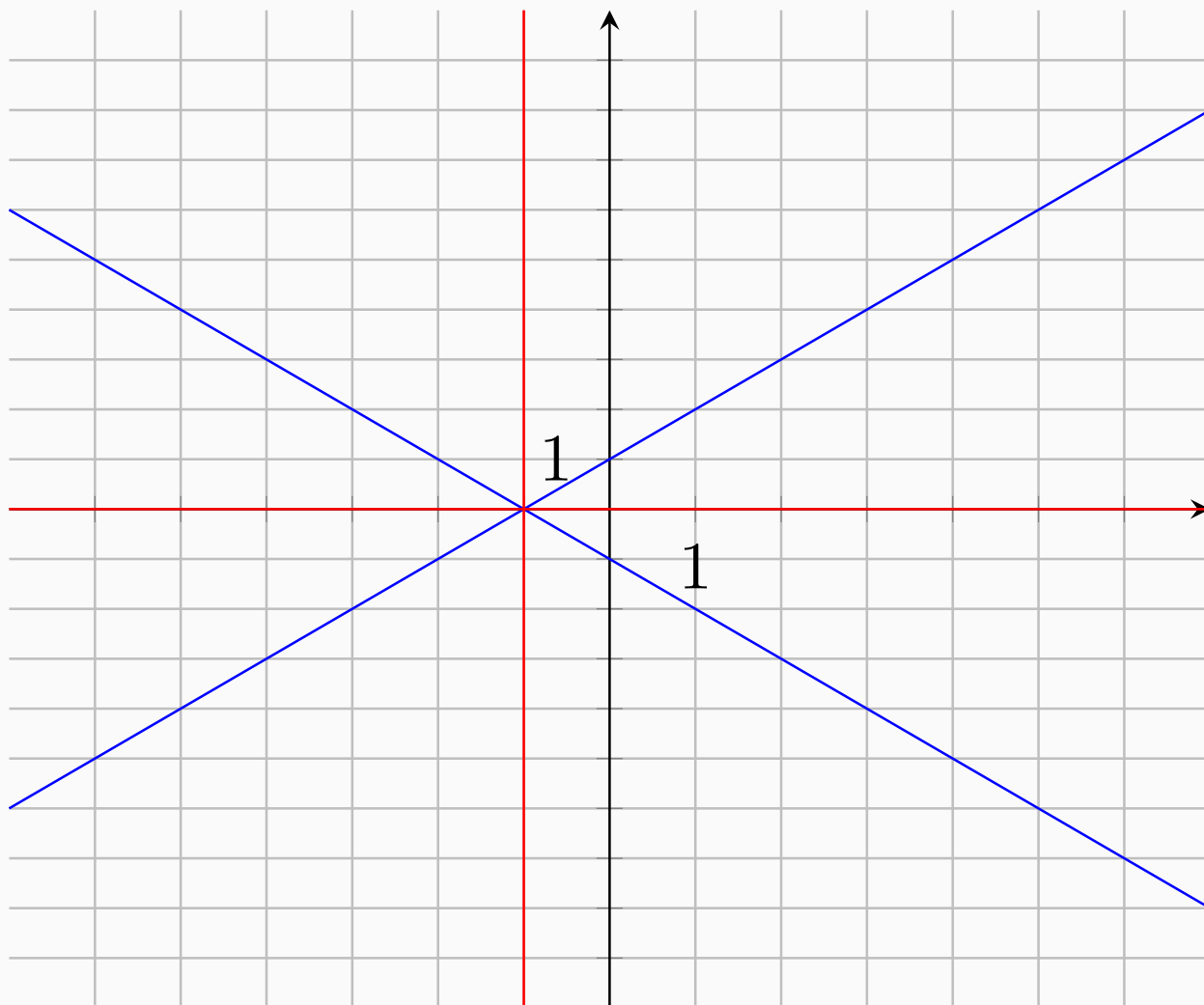
$$\begin{aligned} Z \text{ est imaginaire pur} &\Leftrightarrow \Re(Z) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2 - y^2}{(x+1)^2 + y^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 - y^2 = 0 \text{ et } (x,y) \neq (-1;0) \\ &\Leftrightarrow (x+1-y)(x+1+y) = 0 \text{ et } (x,y) \neq (-1;0) \\ &\Leftrightarrow y = x+1 \text{ ou } y = -x-1 \text{ et } (x,y) \neq (-1;0). \end{aligned}$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions est égal à :

$$S_2 = \{(x;x+1)|x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x;-x-1)|x \in \mathbb{R}\}/\{(-1,0)\}.$$

3

S_1 est représenté en rouge et S_2 est représenté en bleu.



Exercice 3 : (4 points)

Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$, en donnant les solutions sous forme algébrique.

- 1** 1 est la solution de cette équation. En effet,

$$\begin{aligned} -2z + 3 &= iz + 1 - i \\ -2z - iz &= 1 - i - 3 \\ (-2 - i)z &= -2 - i \\ z &= \frac{-2 - i}{-2 - i} \\ z &= 1. \end{aligned}$$

- 2** $\frac{4}{41} - \frac{i}{5}$ est la solution de cette équation. En effet,

$$\begin{aligned} (3 + 5i)z &= 1 - z \\ (3 + 5i)z + z &= 1 \\ (4 + 5i)z &= 1 \\ z &= \frac{1}{4 + 5i} \\ z &= \frac{4 - 5i}{4^2 - (5i)^2} \\ z &= \frac{4 - 5i}{16 + 25} \\ z &= \frac{4}{41} - \frac{5i}{41}. \end{aligned}$$

- 3** Posons $z = x + iy$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} 2z - 2i\bar{z} &= -5 - i \\ \Leftrightarrow 2(x + iy) - 2i(x - iy) &= -5 - i \\ \Leftrightarrow 2x - 2y + (2y - 2x)i &= -5 - i \\ \Leftrightarrow 2x - 2y = -5 \text{ et } 2y - 2x &= -1 \\ \Leftrightarrow -5 &= 1. \end{aligned}$$

Ce qui est absurde, cette équation n'admet donc pas de solution.

- 4** Posons $z = x + iy$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} iz + \bar{z} - 3 &= 7 - \bar{z} + 5i \\ \Leftrightarrow i(x + iy) + x - iy - 3 &= 7 - x + iy + 5i \\ \Leftrightarrow -y + x + (-y + x)i - 3 &= 7 - x + (y + 5)i \\ \Leftrightarrow -y + x - 3 = 7 - x \text{ et } -y + x &= y + 5 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -y + 2x - 10 = 0 & L_1 \\ -2y + x - 5 = 0 & L_2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 10 = 0 & L_1 \\ -3y = 0 & 2L_2 - L_1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow x = 5 \text{ et } y = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, 5 est la solution de cette équation.

Exercice 4 : (2 points)

Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$, en donnant les solutions sous forme algébrique.

- 1** Le discriminant de cette équation $2z^2 - z + 5 = 0$ est : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 5 = 1 - 40 = -39 = 39i^2$.

Ainsi, $\frac{1 - i\sqrt{39}}{4}$ et $\frac{1 + i\sqrt{39}}{4}$ sont les deux solutions de cette équation dans $\mathbb{C}$.

- 2** Posons $z = a + ib$. On a donc,

$$\begin{aligned} z^2 + 2\bar{z} + 1 &= 0 \Leftrightarrow (a + ib)^2 + 2(a - ib) + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow a^2 + 2abi + (ib)^2 + 2(a - ib) + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 + 2abi - b^2 + 2a - 2bi + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2a + 1 + 2b(a - 1)i &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 2a + 1 = 0 \\ 2b(a - 1) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 2a + 1 = 0 \\ b = 0 \text{ ou } a - 1 = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Si $b = 0$, alors $a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2 = 0$. Autrement dit, $a = -1$.

Si $a = 1$, alors $b^2 = 4$. Autrement dit, $b = 2$ ou $b = -2$.

Par conséquent, $S = \{-1; 1 + 2i; 1 - 2i\}$.

Exercice 5 : (3 points)

On considère l'équation $(E) : z^3 - 2(\sqrt{2} - i)z^2 + (3 - 4i\sqrt{2})z + 6i = 0$.

- 1** $-2i$ est une solution évidente de (E) . En effet,
 $(-2i)^3 - 2(\sqrt{2} - i)(-2i)^2 + (3 - 4i\sqrt{2})(-2i) + 6i = 8i + 8(\sqrt{2} - i) - 6i - 8\sqrt{2} + 6i = 0$.
- 2** En développant, on obtient :

$$\begin{aligned}(z + 2i)(az^2 + bz + c) &= az^3 + bz^2 + cz + 2iaz^2 + 2ibz + 2ic \\ &= az^3 + (b + 2ia)z^2 + (c + 2bi)z + 2ic.\end{aligned}$$

Or, $z^3 - 2(\sqrt{2} - i)z^2 + (3 - 4i\sqrt{2})z + 6i = (z + 2i)(az^2 + bz + c)$. Cela revient à dire,

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2ic = 6i \\ b + 2ai = -2(\sqrt{2} - i) \\ c + 2bi = 3 - 4i\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 3 \\ b + 2i = -2\sqrt{2} + 2i \\ c + 2bi = 3 - 4i\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 3 \\ b = -2\sqrt{2} \end{cases}.$$

Ainsi, $z^3 - 2(\sqrt{2} - i)z^2 + (3 - 4i\sqrt{2})z + 6i = (z + 2i)(z^2 - 2\sqrt{2}z + 3)$.

- 3** Le discriminant de l'équation $(*) z^2 - 2\sqrt{2}z + 3 = 0$ est égal à :

$$\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 3 = 8 - 12 = -4 = (2i)^2.$$

Ainsi, $\sqrt{2} - i$ et $\sqrt{2} + i$ sont les deux solutions de l'équation $(*)$.

Et par conséquent l'ensemble des solutions de l'équation (E) est donné par $S = \{-2i; \sqrt{2} - i; \sqrt{2} + i\}$.

Exercice 6 : (4 points)

Les trois questions sont indépendantes.

- 1** $0 + i0$ est la forme algébrique de la somme. En effet,

$$\begin{aligned}1 + i + \dots + i^{143} &= \frac{1 - i^{143+1}}{1 - i} \\ &= \frac{1 - i^{144}}{1 - i} \\ &= \frac{1 - i^{36 \times 4}}{1 - i} \\ &= \frac{1 - (i^4)^{36}}{1 - i} \\ &= 0.\end{aligned}$$

- 2** $117 - 44i$ est la forme algébrique $(1 - 2i)^6$. En effet,

$$\begin{aligned}(1 - 2i)^6 &= ((1 - 2i)^3)^2 \\ &= (1^3 - 3 \times 1^2 \times (2i) + 3 \times 2 \times (2i)^2 - (2i)^3)^2 \\ &= (1 - 6i - 12 + 8i)^2 \\ &= (-11 + 2i)^2 \\ &= (-11)^2 + 2 \times (-11) \times (2i) + (2i)^2 \\ &= 121 - 44i - 4 \\ &= 117 - 44i.\end{aligned}$$

- 3** Posons $\sqrt{i} = a + ib$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
(a+ib)^2 = i &\iff a^2 - b^2 + 2abi = i \\
&\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ b = \frac{1}{2a} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a^2 - \left(\frac{1}{2a}\right)^2 = 0 \\ b = \frac{1}{2a} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2a^4 - 1 = 0 \\ b = \frac{1}{2a} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a^4 = \frac{1}{2} & \text{soit } a^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ b = \frac{1}{2a} \end{cases}
\end{aligned}$$

Simplifions l'écriture de a en considérant que $\sqrt{2} = 2^{1/2}$, et donc que $\sqrt{\sqrt{2}} = \left(2^{1/2}\right)^{1/2} = 2^{1/4}$.

On déduit alors que, $a = \pm \frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \pm \frac{2^{1/4}}{2^{1/2}} = \pm 2^{-1/4} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Et, $b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On obtient finalement :

$$\boxed{\sqrt{2}i = \pm (1+i)}.$$

Attention ! Cette notation $\sqrt{2}i$ est fortement déconseillée. Car, déterminer la racine carrée d'un nombre complexe z revient à résoudre l'équation $z^2 = a + ib$ et cette équation admet deux solutions dans $\mathbb{C}$.

Par ailleurs, la forme algébrique d'un nombre complexe est unique, donc cette écriture $\sqrt{i} = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ n'est pas correcte.

Une fois que vous avez compris cela, vous pouvez utiliser quand même cette notation pour aller un peu plus vite dans le raisonnement.