

Corrigé : Devoir Maison n°3

Exercice 1 : (3 points)

La transformée de Fourier discrète de $(x_0; x_1; \dots; x_{n-1})$ est $(X_0; X_1; \dots; X_{n-1})$ avec

$$X_l = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \times w^{-kl} \quad \text{et} \quad 0 \leq l \leq n-1.$$

1. Dans le cas particulier où $n = 2$. La transformée de Fourier de $(x_0; x_1)$ est $(X_0; X_1)$ avec :

$$\begin{aligned} \begin{cases} X_0 = \sum_{k=0}^1 x_k \times w^{-k \times 0} \\ X_1 = \sum_{k=0}^1 x_k \times w^{-k \times 1} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} X_0 = \sum_{k=0}^1 x_k \times w^0 \\ X_1 = \sum_{k=0}^1 x_k \times w^{-k} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} X_0 = x_0 + x_1 \\ X_1 = x_0 w^0 + x_1 w^{-1} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} X_0 = x_0 + x_1 \\ X_1 = x_0 + x_1 e^{-i\pi} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} X_0 = x_0 + x_1 \\ X_1 = x_0 - x_1. \end{cases} \end{aligned}$$

2. Deuxième cas particulier où $n = 3$.

(a) La transformée de Fourier de $(x_0; x_1; x_2)$ est $(X_0; X_1; X_2)$ avec :

$$\begin{aligned} \begin{cases} X_0 = \sum_{k=0}^2 x_k \times w^{-k \times 0} \\ X_1 = \sum_{k=0}^2 x_k \times w^{-k \times 1} \\ X_2 = \sum_{k=0}^2 x_k \times w^{-k \times 2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} X_0 = \sum_{k=0}^2 x_k \times w^0 \\ X_1 = \sum_{k=0}^2 x_k \times w^{-k} \\ X_2 = \sum_{k=0}^2 x_k \times w^{-2k} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} X_0 = x_0 + x_1 + x_2 \\ X_1 = x_0 w^0 + x_1 w^{-1} + x_2 w^{-2} \\ X_2 = x_0 w^0 + x_1 w^{-2} + x_2 w^{-4} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} X_0 = x_0 + x_1 + x_2 \\ X_1 = x_0 + x_1 e^{-i\frac{2\pi}{3}} + x_2 e^{-i\frac{4\pi}{3}} \\ X_2 = x_0 + x_1 e^{-i\frac{4\pi}{3}} + x_2 e^{-i\frac{8\pi}{3}} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} X_0 = x_0 + x_1 + x_2 \\ X_1 = x_0 + x_1 e^{-i\frac{2\pi}{3}} + x_2 e^{-i\frac{4\pi}{3}} \\ X_2 = x_0 + x_1 e^{-i\frac{4\pi}{3}} + x_2 e^{-i\frac{2\pi}{3}} \end{cases}. \end{aligned}$$

(b) De la question précédente on déduit la transformée de Fourier de $(1; 0; 1)$:

$$\begin{cases} X_0 = 2 \\ X_1 = 1 + e^{-i\frac{4\pi}{3}} = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ X_2 = 1 + e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Exercice 2 : (7 points)

1. (a) Posons $S_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}
 (1 - z)(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}) &= S_n - zS_n \\
 &= S_n - (z + z^2 + \dots + z^n) \\
 &= S_n - (-1 + 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} + z^n) \\
 &= S_n - (-1 + S_n + z^n) \\
 &= S_n + 1 - S_n - z^n \\
 &= 1 - z^n.
 \end{aligned}$$

- (b) Soit $z \in \mathbb{C}$. En utilisant la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}
 z^n = 1 &\Leftrightarrow z^n - 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (1 - z)(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow 1 - z = 0 \text{ ou } 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0.
 \end{aligned}$$

2. On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

- (a) Il est assez aisé de voir que : $\omega^5 = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5 = e^{i\frac{2 \times 5 \times \pi}{5}} = e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi) = 1$.

Par ailleurs, $\bar{\omega} = e^{-i\frac{2\pi}{5}}$ et $\omega\bar{\omega} = e^{i\frac{2\pi}{5}}e^{-i\frac{2\pi}{5}} = e^0 = 1$.

Dès lors, $\omega^5 = 1 \Leftrightarrow \omega^5\bar{\omega} = \bar{\omega} \Leftrightarrow \omega^4 \times \omega\bar{\omega} = \bar{\omega} \Leftrightarrow \omega^4 = \bar{\omega}$.

De plus, $\omega^4 = \bar{\omega} \Leftrightarrow \omega^4\bar{\omega} = \bar{\omega}^2 \Leftrightarrow \omega^3 \times \omega\bar{\omega} = \bar{\omega}^2 \Leftrightarrow \omega^3 = \bar{\omega}^2$.

- (b) On rappelle que : $\overline{\omega^n} = \bar{\omega}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On pose $u = \omega + \omega^4$ et $v = \omega^2 + \omega^3$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 u + v &= \omega + \omega^4 + \omega^2 + \omega^3 \\
 &= \omega(1 + \omega + \omega^2 + \omega^3) \\
 &= \omega \times \frac{\omega^4 - 1}{\omega - 1} \\
 &= \frac{\omega^5 - \omega}{\omega - 1} \\
 &= \frac{1 - \omega}{\omega - 1} \\
 &= -1.
 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 uv &= (\omega + \omega^4)(\omega^2 + \omega^3) \\
 &= (\omega + \bar{\omega})(\omega^2 + \bar{\omega}^2) \\
 &= \omega^3 + \omega\bar{\omega}^2 + \bar{\omega}\omega^2 + \bar{\omega}^3 \\
 &= \bar{\omega}^2 + \bar{\omega} + \bar{\omega}^3 + \bar{\omega}^4 \quad \text{car } \bar{\omega}\omega = 1 \text{ et } \omega^2 = \bar{\omega}^3 \\
 &= \bar{\omega} \times \frac{\bar{\omega}^4 - 1}{\bar{\omega} - 1} \\
 &= \frac{1 - \bar{\omega}}{\bar{\omega} - 1} \\
 &= -1.
 \end{aligned}$$

- (c) u et v sont les deux solutions de l'équation $z^2 - (u + v)z + uv = 0$, soit $z^2 + z - 1 = 0$.

- (d) Le discriminant de l'équation $z^2 + z - 1 = 0$ est égal à : $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$. Δ étant strictement positif, cette équation admet deux solutions :

$$u = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} > 0 \quad \text{et} \quad v = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0.$$

Par ailleurs, $u = \omega + \omega^4 = \omega + \bar{\omega} = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $v = \omega^2 + \omega^3 = \omega^2 + \bar{\omega}^2 = 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Par conséquent, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$.

3. Soit A_p le point d'affixe ω^p avec p un entier naturel.

- (a) Si ω^p est l'affixe de A_p , alors ω^{p+5} est l'affixe A_{p+5} . Dès lors,

$$\begin{aligned} \omega^{p+5} &= \omega^{p+5} \\ &= \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^{p+5} \\ &= e^{i\frac{2(p+5)\pi}{5}} \\ &= e^{i\frac{2p\pi}{5}} e^{i\frac{10\pi}{5}} \\ &= e^{i\frac{2p\pi}{5}} e^{2\pi i} \\ &= \omega^p, \quad \text{car } e^{2\pi i} = 1 \quad \text{et} \quad e^{i\frac{2p\pi}{5}} = \omega^p. \end{aligned}$$

Ainsi, les points A_p et A_{p+5} sont confondus.

Par ailleurs, on sait que : $\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1$. Ainsi, les coordonnées du point A_1 sont :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{1 - \frac{(-1 + \sqrt{5})^2}{16}} = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}.$$

- (b) Pour tout entier naturel p , on a : $OA_p = |\omega^p| = 1$. De plus,

$$\begin{aligned} A_p A_{p+1} &= |\omega^{p+1} - \omega^p| \\ &= |\omega^p| |\omega - 1| \\ &= |\omega - 1| \\ &= \sqrt{\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1\right)^2 + \sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)} \\ &= \sqrt{2 - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}. \end{aligned}$$

On dit alors que le pentagone $A_0 A_1 A_2 A_3 A_4$ est un pentagone régulier.

