

Devoir Maison n°2 : Corrigés

Exercice 1 : (3 points)

On définit la suite de nombres complexes (z_n) par $z_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}i$.
Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = z_n - i$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= z_{n+1} - i \\ &= \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}i - i \\ &= \frac{1}{3}z_n - \frac{1}{3}i \\ &= \frac{1}{3}(z_n - i) \\ &= \frac{1}{3}u_n. \end{aligned}$$

2. Selon la question précédente, (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{1}{3}\right)^n u_0 \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n (z_0 - i) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n (1 - i). \end{aligned}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} z_n &= u_n + i \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n (1 - i) + i \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) i. \end{aligned}$$

Exercice 2 : (3 points)

On a les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$1. B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 : (suite)

2. (a) Le produit des deux matrices B et I est commutatif, Autrement dit, $BI = IB = B$.
On peut donc utiliser la formule du binôme de Newton pour développer l'expression $(I + B)^n$.
- (b) En utilisant la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$\begin{aligned} A^n &= (I + B)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k I^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} I + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2. \text{ Car, } I^{n-k} = I \text{ et } B^k = 0, \forall n \geq 3. \end{aligned}$$

Exercice 3 : (4 points)

Soit P le polynôme défini par $P(z) = z^3 + 2(1 - i)z^2 + (1 - 4i)z - 2i$.

1. Soit α un réel. On a :

$$\begin{aligned} P(i\alpha) = 0 &\Leftrightarrow (i\alpha)^3 + 2(1 - i)(i\alpha)^2 + (1 - 4i)(i\alpha) - 2i = 0 \\ &\Leftrightarrow -\alpha^3 i - 2(1 - i)\alpha^2 + (1 - 4i)(i\alpha) - 2i = 0 \\ &\Leftrightarrow -\alpha^3 i - 2\alpha^2 + 2\alpha^2 i + i\alpha + 4\alpha - 2i = 0 \\ &\Leftrightarrow (4\alpha - 2\alpha^2) + (-\alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha - 2)i = 0. \\ &\Leftrightarrow (2\alpha(2 - \alpha)) + (-\alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha - 2)i = 0. \end{aligned}$$

L'unicité de l'écriture algébrique d'un nombre complexe entraîne alors :

$$\begin{cases} 2\alpha(2 - \alpha) = 0 \\ -\alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

2. Soient p et q deux nombres complexes. On a alors :

$$\begin{aligned} P(z) &= (z - 2i)(z^2 + pz + q) \\ &= z^3 + pz^2 + qz - 2iz^2 - 2ipz - 2iq \\ &= z^3 + (p - 2i)z^2 + (q - 2ip)z - 2iq. \end{aligned}$$

Or, $P(z) = z^3 + 2(1 - i)z^2 + (1 - 4i)z - 2i$. Ainsi,

$$\begin{cases} p - 2i = 2 - 2i \\ q - 2ip = 1 - 4i \\ -2iq = -2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2 \\ q = 1 \end{cases}.$$

Par conséquent, $P(z) = (z - 2i)(z^2 + 2z + 1)$.

3. $2i$ et -1 sont les deux solutions de l'équation $P(z) = 0$. En effet,

$$\begin{aligned} P(z) = 0 &= (z - 2i)(z^2 + 2z + 1) = 0 \\ &= (z - 2i)(z + 1)^2 = 0 \\ &= z - 2i = 0 \text{ ou } (z + 1)^2 = 0 \\ &= z = 2i \text{ ou } z = -1. \end{aligned}$$

