

Corrigés

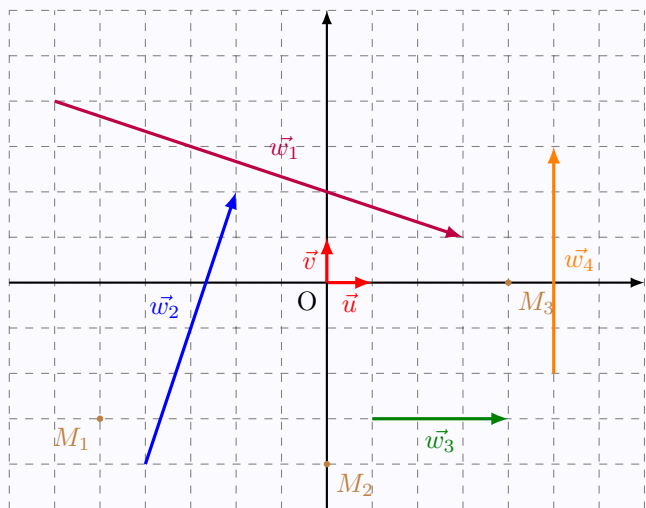
Série d'exercices

Classe : Maths Expertes

Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

Donner l'affixe des points et vecteurs de la figure ci-dessous :



- L'affixe de $\vec{w}_1$ est : $9 - 3i$.
- L'affixe de $\vec{w}_2$ est : $2 + 6i$.
- L'affixe de $\vec{w}_3$ est : $3 + 0i = 3$.
- L'affixe de $\vec{w}_4$ est : $0 + 5i = 5i$.
- L'affixe de M_1 est : $-5 - 3i$.
- L'affixe de M_2 est : $0 - 4i = -4i$.
- L'affixe de M_3 est : $4 + 0i = 4$.

Exercice n°2

- a) $|i| = 1$ car l'image de i est le point de coordonnées $(0; 1)$ et la distance qui le sépare de l'origine du repère est égale à 1.
- b) $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
- c) $|1 - i| = |\overline{1 - i}| = |1 + i| = \sqrt{2}$.
- d) $|-3 + 2i| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$.
- e) $|-4| = 4$ car la distance qui sépare O du point image de $z = -4$ est égale à 4. On s'aperçoit d'ailleurs ici que le module est égal à la valeur absolue quand le complexe est réel.
- f) $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.
- g) $|5 - 2i| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$.
- h) $|4,5 + 6i| = \sqrt{(4,5)^2 + 6^2} = \sqrt{56,25} = 7,5$.

Exercice n°3

1. $|(1 + i)^{16}| = |1 + i|^{16} = (\sqrt{2})^{16} = 2^8 = 256$.
2. $|(2 - i)(1 + i)| = |2 - i| \times |1 + i| = \sqrt{4 + 1} \times \sqrt{2} = \sqrt{10}$.
3. $\left| \frac{1 - i}{1 + i} \right| = \frac{|1 - i|}{|1 + i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$.
4. $(5 - 3i)(5 + 3i) = |5 + 3i|^2 = 5^2 + 3^2 = 34$.

Exercice n°4

1. $z_1 = 1 + i$.

$|z_1| = \sqrt{2}$. On factorise alors z_1 par $\sqrt{2}$:

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Un argument θ de z_1 est donc tel que :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi].$$

Finalement,

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

2. $z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$.

$|z_2| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = 4$. Alors,

$$z_2 = 4 \left(\frac{2\sqrt{3}}{4} + \frac{2}{4}i \right) = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right).$$

$$\theta = \arg(z_2) \iff \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \theta = \frac{\pi}{6} \quad [2\pi].$$

Finalement,

$$z_2 = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

3. $z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

4. $z_4 = -2 + 2i$.

$|z_4| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Alors,

$$z_4 = 2\sqrt{2} \left(-\frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{2}}i \right) = 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right).$$

$$\theta = \arg(z_4) \iff \begin{cases} \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \iff \theta = \frac{3\pi}{4} \quad [2\pi].$$

Finalement,

$$z_4 = 2\sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right].$$

Exercice n°5

1. $|z_1| = |1+i|^4 = (\sqrt{2})^4 = 4$.
 $\arg(z_1) = \arg[(1+i)^4] = 4\arg(1+i) = 4 \times \frac{\pi}{4}$
 $\text{mod } 2\pi = \pi \text{ mod } 2\pi$.
 Donc $z_1 = 4(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = 4(-1 + i \times 0)$,
 soit $\boxed{z_1 = -4}$.
2. $\left| \frac{1+i}{1-i} \right| = \left| \frac{1+i}{1-i} \right| = 1$.
 $\arg\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = \arg(1+i) - \arg(1-i) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ mod } 2\pi$.
 On en déduit alors que $z_2 = \cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2}$, soit $\boxed{z_2 = i}$.

Exercice n°6

1. $z = \cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3}$,
 et $z' = \cos \frac{\pi}{4} - i\sin \frac{\pi}{4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.
 Ainsi, $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$.
 De plus, $|z| = |z'| = 1$ donc $|zz'| = 1$.
 Finalement,

$$\boxed{zz' = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

2. $z = \cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
 $z' = \cos \frac{\pi}{4} - i\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.
 Par conséquent,

$$\begin{aligned} zz' &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i + \frac{\sqrt{6}}{4}i + \frac{\sqrt{6}}{4} \\ zz' &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i. \end{aligned}$$

3. Des questions précédentes, on déduit :

$$zz' = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i$$

et donc :

$$\boxed{\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}.$$

Exercice n°7

Le polynôme $z^2 + z + 1$ a pour discriminant :

$$\Delta = -3$$

donc ses racines sont :

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

et son conjugué :

$$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = e^{-\frac{2\pi}{3}i}.$$

Or, par définition, j est une racine de ce polynôme : c'est celle dont la partie imaginaire est strictement positive, donc $j = e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

Ainsi, l'autre racine correspond à $\bar{j}$, ce qui justifie que $\bar{j}^2 + \bar{j} + 1 = 0$.

Exercice n°8

$$\begin{aligned} 1. \quad z_1 &= \frac{1}{2}iz_0 + 1 - i & z_2 &= \frac{1}{2}iz_1 + 1 - i \\ &= \frac{1}{2}i \times i + 1 - i & &= \frac{1}{2}i \times \left(\frac{1}{2} - i\right) + 1 - i \\ &= -\frac{1}{2} + 1 - i & &= \frac{1}{4}i + \frac{1}{2} + 1 - i \\ &= \frac{1}{2} - i. & &= \frac{3}{2} - \frac{3}{4}i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad v_{n+1} &= z_{n+1} - \frac{6}{5} + \frac{2}{5}i \\ &= \frac{1}{2}iz_n + 1 - i - \frac{6}{5} + \frac{2}{5}i \\ &= \frac{1}{2}iz_n - \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \\ &= \frac{1}{2}i \left(z_n - \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}i} - \frac{\frac{3}{5}i}{\frac{1}{2}i}\right) \\ &= \frac{1}{2}i \left(z_n + \frac{2}{5}i - \frac{6}{5}\right) \\ &= \frac{1}{2}iv_n. \end{aligned}$$

Ainsi, $(v_n)_n$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}i$ et de premier terme :

$$\begin{aligned} v_0 &= z_0 - \frac{6}{5} + \frac{2}{5}i \\ v_0 &= -\frac{6}{5} + \frac{7}{5}i. \end{aligned}$$

3. On déduit de la question précédente que :

$$v_n = v_0 \times q^n = \left(-\frac{6}{5} + \frac{7}{5}i\right) \times \left(\frac{1}{2}i\right)^n$$

et donc :

$$z_n = v_n + \frac{6}{5} - \frac{2}{5}i = \left(-\frac{6}{5} + \frac{7}{5}i\right) \times \left(\frac{1}{2}i\right)^n + \frac{6}{5} - \frac{2}{5}i$$

$$4. \quad |v_n| = |v_0| \times \left|\frac{1}{2}i\right|^n = |v_0| \times \frac{1}{2^n} = \frac{|v_0|}{2^n}.$$

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |v_n| = 0$.

On peut alors en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

Or, $z_n = v_n + \frac{6}{5} - \frac{2}{5}i$ donc :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \frac{6}{5} - \frac{2}{5}i}.$$

Exercice n°9

$$- \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$$

$$\iff \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$$

$$\iff \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$$

$$\iff \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2} + 2}{4}$$

$$\iff \boxed{\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2} + 2}}{2}}.$$

$$- \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\iff \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\iff \sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\iff \boxed{\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}}.$$

On prend ici la valeur positive du sinus et du cosinus car $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$.

Exercice n°10

Remarquons que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} - \cos \frac{7\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}.$$

$$\begin{aligned} - \sin \frac{7\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

Exercice n°11

$$\begin{aligned} 1. (1 + i)^9 &= \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^9 \\ &= 16\sqrt{2} \left(\cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4} \right) \\ &= 16\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 16\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$(1 + i)^9 = 16 + 16i.$$

$$\begin{aligned} 2. (\sqrt{3} - i)^6 &= \left[2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \right]^6 \\ &= \left[2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) \right]^6 \\ &= 2^6 (\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)) \\ (\sqrt{3} - i)^6 &= -64. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. (1 + i\sqrt{3})^9 &= \left[2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right]^9 \\ &= \left[2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right]^9 \\ &= 2^9 \left(\cos \frac{9\pi}{3} + i \sin \frac{9\pi}{3} \right) \\ &= 512 (\cos(3\pi) + i \sin(3\pi)) \\ &= 512 (\cos(\pi) + i \sin(\pi)) \\ (1 + i\sqrt{3})^9 &= -512. \end{aligned}$$

Exercice n°12

Nous allons ici avoir besoin du binôme de Newton, et plus particulièrement du développement :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$\begin{aligned} \cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}}{8} \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + 3 \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right] \\ \cos^3(x) &= \frac{1}{4} [\cos(3x) + 3 \cos(x)] \\ \cos^3(x) &= \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos(x). \end{aligned}$$

Exercice n°13

Nous allons ici avoir besoin du binôme de Newton, et plus particulièrement du développement :

$$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.$$

$$\begin{aligned} \sin^5(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^5 \\ &= \frac{e^{5ix} - 5e^{4ix}e^{-ix} + 10e^{3ix}e^{-2ix} - 10e^{2ix}e^{-3ix} + 5e^{ix}e^{-4ix} - e^{-5ix}}{32i} \\ &= \frac{1}{16} \left[\frac{e^{5ix} - e^{-5ix}}{2i} - 5 \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} + 10 \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right] \\ &= \frac{1}{16} (\sin(5x) - 5 \sin(3x) + 10 \sin(x)) \\ &= \frac{1}{16} \sin(5x) - \frac{5}{16} \sin(3x) + \frac{5}{8} \sin(x). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sin^5(x) = \frac{1}{16} \sin(5x) - \frac{5}{16} \sin(3x) + \frac{5}{8} \sin(x).$$

Exercice n°14

Par définition,

$$z_n = (\cos 0 + i \sin 0) + (\cos(x) + i \sin(x)) + \dots + (\cos(nx) + i \sin(nx)) \\ = \sum_{k=0}^n e^{kix}.$$

On va ici utiliser la formule :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1.$$

Ainsi,

$$z_n = \frac{e^{(n+1)ix} - 1}{e^{ix} - 1} \\ = \frac{e^{(n+1)i\frac{x}{2}} \left[e^{(n+1)i\frac{x}{2}} - e^{-(n+1)i\frac{x}{2}} \right]}{e^{i\frac{x}{2}} \left[e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}} \right]} \\ = e^{ni\frac{x}{2}} \times \frac{2i \sin \left[(n+1)\frac{x}{2} \right]}{2i \sin \frac{x}{2}}$$

Par conséquent,

$$C_n = \Re(z_n) = \cos \left(n \frac{x}{2} \right) \frac{\sin \left[(n+1)\frac{x}{2} \right]}{\sin \frac{x}{2}}$$

et

$$S_n = \Im(z_n) = \sin \left(n \frac{x}{2} \right) \frac{\sin \left[(n+1)\frac{x}{2} \right]}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Exercice n°15

Posons $z = e^{i\theta}$.

On sait que : $z^3 = 1 \iff |z|^3 = 1 \iff |z| = 1$.

Alors,

$$z^3 = 1 \iff e^{3i\theta} = e^{i(0+2k\pi)}, k \in \mathbb{Z} \iff \theta = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

- Si $k = 3p$, $p \in \mathbb{Z}$, $z = e^{i \times 2p\pi} = 1$;
- si $k = 3p + 1$, $z = e^{i \left(\frac{2\pi}{3} + 2p\pi \right)} = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j$;
- si $k = 3p + 2$, $z = e^{i \left(\frac{4\pi}{3} + 2p\pi \right)} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \bar{j}$.

Finalement, il n'y a que trois complexes dont le cube est égal à 1 : 1, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\bar{j} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

Exercice n°16

Rappelons que l'écriture exponentielle d'un nombre complexe est $re^{i\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}_+$.

1. $3ie^{i\pi}$ n'est pas une forme complexe car $3i \notin \mathbb{R}$. On doit alors modifier cela :

$$3ie^{i\pi} = 3e^{\frac{i\pi}{2}} e^{i\pi} = 3e^{\frac{3i\pi}{2}}.$$

2. $-2e^{\frac{i\pi}{3}}$ n'est pas une écriture exponentielle car $-2 \notin \mathbb{R}_+$.

$$-2e^{\frac{i\pi}{3}} = 2e^{i\pi} e^{\frac{i\pi}{3}} = 2e^{\frac{4i\pi}{3}}.$$

3. $\pi e^{\frac{i\pi}{6}}$ est l'écriture exponentielle du nombre complexe de

module $\pi \in \mathbb{R}_+$ et dont un argument est $\theta = \frac{\pi}{6}$.

4. $5 = 5e^{0i}$ donc c'est bien une forme exponentielle du nombre complexe de module 5 et dont un argument est 0.
5. $4e^{\frac{\pi}{5}} = 4e^{\frac{\pi}{5}} e^{0i}$ est bien l'écriture exponentielle du nombre complexe de module $4e^{\frac{\pi}{5}}$ et dont un argument est 0.
6. $-\pi$ n'est pas une écriture exponentielle :

$$-\pi = \pi e^{i\pi}$$

représente le nombre complexe de module π et dont un argument vaut π .

Exercice n°17

1. On a :

$$\frac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}} (e^{-i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{\pi}{6}})}{e^{i\frac{\pi}{8}} (e^{-i\frac{\pi}{8}} - e^{i\frac{\pi}{8}})} \\ = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{8}}} \times \frac{2i \times \frac{e^{-i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{\pi}{6}}}{2i}}{2i \times \frac{e^{-i\frac{\pi}{8}} - e^{i\frac{\pi}{8}}}{2i}} \\ = e^{i\frac{\pi}{24}} \times \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{8}} \\ = e^{i\frac{\pi}{24}} \times \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}} \\ \frac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} e^{i\frac{\pi}{24}}.$$

2. On a :

$$\frac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i} \\ = \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)}{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2} \\ \text{(on a multiplié par le conjugué du dénominateur)} \\ = \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} + i \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{4} \right)}{\frac{4-4\sqrt{2}+2+2}{4}} \\ = \left(\frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}i \right) \times \frac{4}{8-4\sqrt{2}} \\ = \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8-4\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{8-4\sqrt{2}}i \times \frac{8+4\sqrt{2}}{8+4\sqrt{2}} \\ \frac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4} + \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4}i.$$

3. Des questions 1 et 2, on déduit l'égalité suivante :

$$\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4} + \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4}i = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} e^{i\frac{\pi}{24}}$$

soit :

$$e^{i\frac{\pi}{24}} = \sqrt{2+\sqrt{2}} \left(\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4} + \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4}i \right)$$

D'où :

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{24} &= \sqrt{2 - \sqrt{2}} \times \frac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{4} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(2 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{3} + \sqrt{6})^2} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{8 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}.\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\sin \frac{\pi}{24} &= \sqrt{2 - \sqrt{2}} \times \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(2 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^2} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{8 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}.\end{aligned}$$

Exercice n°18

Nous savons que :

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Par conséquent,

$$i^i = (e^{i\frac{\pi}{2}})^i = e^{i\frac{\pi}{2} \times i} = e^{-\frac{\pi}{2}} \in \mathbb{R}.$$

Exercice n°19

$$1. w^5 = (e^{i\frac{2\pi}{5}})^5 = e^{i\frac{2\pi}{5} \times 5} = e^{2i\pi} = 1.$$

$$1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = \frac{w^5 - 1}{w - 1} = 0.$$

2. On développe le second membre de l'égalité :

$$\begin{aligned}\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 &= z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} - 1 \\ &= z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1.\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{1}{z^2} (1 + z + z^2 + z^3 + z^4) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2.$$

On a donc bien :

$$\frac{1}{z^2} (1 + z + z^2 + z^3 + z^4) = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1$$

3. (a) Le polynôme $Z^2 + Z - 1$ a pour discriminant :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5.$$

Il admet donc deux racines réelles distinctes :

$$Z_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

(b) D'après la question 1,

$$1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = 0,$$

donc

$$\frac{1}{w^2} (1 + w + w^2 + w^3 + w^4) = 0,$$

soit, d'après la question 2 :

$$\left(w + \frac{1}{w}\right)^2 + \left(w + \frac{1}{w}\right) - 1 = 0.$$

ou encore :

$$\left(e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}}\right)^2 + \left(e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}}\right) - 1 = 0.$$

Or,

$$\begin{aligned}e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}} &= \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} + \cos \left(-\frac{2\pi}{5}\right) \\ &\quad + i \sin \left(-\frac{2\pi}{5}\right) \\ &= 2 \cos \frac{2\pi}{5}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\left(2 \cos \frac{2\pi}{5}\right)^2 + 2 \cos \frac{2\pi}{5} - 1 = 0. \quad (1)$$

$2 \cos \frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation $Z^2 + Z - 1 = 0$
donc, d'après la question précédente :

$$2 \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad 2 \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2},$$

soit :

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \quad \text{ou} \quad \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Or, $\cos \frac{2\pi}{5} > 0$ car $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ d'où :

$$\boxed{\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}}.$$

Exercice n°20

$$\begin{aligned}1. z^3 - 27 &= z^3 - 3^3 \\ &= (z - 3)(z^2 + 3z + 9).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2. z^5 - i &= z^5 - i^5 \\ &= (z - i)(z^4 + iz^3 + i^2z^2 + i^3z + i^4) \\ &= (z - i)(z^4 + iz^3 - z^2 - iz + 1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3. z^4 - 4 &= (z^4 - (\sqrt{2})^4) \\ &= (z - \sqrt{2})(z^3 + \sqrt{2}z^2 + (\sqrt{2})^2z + (\sqrt{2})^3) \\ &= (z - \sqrt{2})(z^3 + \sqrt{2}z^2 + 2z + 2\sqrt{2}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4. z^6 + 64 &= z^6 - (2i)^6 \\ &= (z - 2i)(z^5 + 2iz^4 + (2i)^2z^3 + (2i)^3z^2 + (2i)^4z + (2i)^5) \\ &= (z - 2i)(z^5 + 2iz^4 - 4z^3 - 8iz^2 + 16z + 32i).\end{aligned}$$

Exercice n°21

$$P(z) = \frac{1}{2}z^3 + 5z + \frac{11}{2} \text{ donc :}$$

$$P(1) = \frac{1}{2} \times 1^3 + 5 \times 1 + \frac{11}{2} = \frac{1}{2} + \frac{10}{2} - \frac{11}{2} = 0.$$

On en déduit alors que :

$$P(z) = (z+1)(az^2 + bz + c).$$

En développant, on obtient :

$$P(z) = az^3 + (a+b)z^2 + (b+c)z + c.$$

L'identification des coefficients, implique :

$$\begin{cases} a &= \frac{1}{2} \\ a+b &= 0 \\ b+c &= 5 \\ c &= \frac{11}{2} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a &= \frac{1}{2} \\ b &= -\frac{1}{2} \\ c &= \frac{11}{2} \end{cases}.$$

Ainsi,

$$P(z) = (z+1) \left(\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{11}{2} \right).$$

Le discriminant de $\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{11}{2}$ est :

$$\Delta = -\frac{43}{4}$$

donc ses racines complexes sont :

$$z_1 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{43}}{2}}{2 \times \frac{1}{2}} i = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{43}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{43}}{2}.$$

Les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sont donc -1 , z_1 et z_2 .

Exercice n°22

$$z^4 + 3z^3 - z - 3 = 0. \quad (E)$$

1. En remplaçant z par -3 dans le membre de gauche de (E) , on obtient :

$$(-3)^4 + 3(-3)^3 - (-3) - 3 = 81 - 81 + 3 - 3 = 0.$$

Ainsi, -3 est bien solution de (E) .

On peut alors en déduire que :

$$z^4 + 3z^3 - z - 3 = (z+3)Q(z).$$

2. Cette question, consistant à trouver nous-même une solution de (E) , nous pousse à nous dire qu'il en existe une évidente. Commençons donc par remplacer z par 1 :

$$1^4 + 3 \times 1^3 - 1 - 3 = 1 + 3 - 1 - 3 = 0.$$

Donc 1 est solution de (E) .

3. On sait que :

$$1 + z + z^2 = \frac{z^3 - 1}{z - 1}$$

donc :

$$z^4 + 3z^3 - z - 3 = (z+3)(z-1)(z^2 + z + 1).$$

Les racines de $z^2 + z + 1$ sont :

$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}} \text{ et } \bar{j} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^2.$$

Ainsi, les solutions de l'équation (E) sont :

$$-3; 1; j; j^2.$$

Exercice n°23

Le discriminant de $3iz^2 + 2z + i$ est :

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 3i \times i = 4 - 12i^2 = 4 + 12 = 16.$$

Il y a donc deux solutions à (E) :

$$z_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 3i} = -\frac{1}{i} = -\frac{i}{i^2} = i$$

et

$$z_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 3i} = \frac{1}{3i} = -\frac{1}{3}i.$$

Exercice n°24

On souhaite résoudre l'équation :

$$2z^2 - 3z + 3 - i = 0. \quad (E)$$

$$\begin{aligned} 1. (a+ib)^2 = -15+8i &\iff a^2 - b^2 + 2abi = -15+8i \\ &\iff \begin{cases} a^2 - b^2 &= -15 \\ 2ab &= 8 \end{cases} \end{aligned}$$

De la seconde égalité, on peut écrire :

$$b = \frac{4}{a}$$

et déduire, à partir de la première :

$$a^2 - \frac{16}{a^2} = -15 \iff a^4 + 15a^2 - 16 = 0.$$

En posant $x = a^2$, on a : $x^2 + 15x - 16 = 0$, de racine évidente $x_1 = 1$ et donc de seconde racine $x_2 = \frac{c}{a} = -16$.

Ainsi, $a^2 = 1$, soit $a = 1$ ou $a = -1$, ou $a^2 = 16$, soit $a = 4$ ou $a = -4$.

- Si $a = 1$, $b = 4$; dans ce cas, $(a+ib)^2 = (1+4i)^2 = -15+8i$.
- Si $a = -1$, $b = -4$; dans ce cas, $(a+ib)^2 = (-1-4i)^2 = -15+8i$.
- Si $a = 4$, $b = 1$; dans ce cas, $(a+ib)^2 = (4+i)^2 = 15+8i$.
- Si $a = -4$, $b = -1$; dans ce cas, $(a+ib)^2 = (-4-i)^2 = 15+8i$.

Nous voyons alors qu'il n'y a que deux possibilités : $1+4i$ et $-1-4i$.

2. Le discriminant de $2z^2 - 3z + 3 - i$ est :

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (3-i) = 9 - 24 + 8i = -15 + 8i.$$

Les deux solutions complexes de (E) sont alors :

$$z_1 = \frac{3 - \sqrt{-15 + 8i}}{4} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{3 + \sqrt{-15 + 8i}}{4}.$$

Or, $(1 + 4i)^2 = -15 + 8i$ et $(-1 - 4i)^2 = -15 + 8i$ donc $\sqrt{-15 + 8i} = 1 + 4i$ et $\sqrt{-15 + 8i} = -1 - 4i$.

— Si $\sqrt{-15 + 8i} = 1 + 4i$,

$$z_1 = \frac{3 - (1 + 4i)}{4} = \frac{2 - 4i}{4} = \frac{1}{2} - i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{3 + (1 + 4i)}{4} = 1 + i.$$

— Si $\sqrt{-15 + 8i} = -1 - 4i$,

$$z_1 = \frac{3 - (-1 - 4i)}{4} = 1 + i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{3 + (-1 - 4i)}{4} = \frac{1}{2} - i.$$

Finalement, les deux solutions de (E) sont $1 + i$ et $\frac{1}{2} - i$.