

Exercice n°1

$$\Re(z_1) = 5, \Im(z_1) = -2, \bar{z}_1 = 5 + 2i.$$

$$\Re(z_2) = 15, \Im(z_2) = 0, \bar{z}_2 = 15.$$

$$\Re(z_3) = 0, \Im(z_3) = 3, \bar{z}_3 = -3i.$$

En développant on obtient : $z_4 = 2i - 3$. Ainsi,
 $\Re(z_4) = -3, \Im(z_4) = 2, \bar{z}_4 = -3 - 2i$.

Exercice n°2

a) On remplace z par $x + iy$ et $\bar{z}$ par $x - iy$, puis on effectue les calculs. On obtient alors :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{x - iy}{x + iy} \\ &= \frac{(x - iy)(x - iy)}{(x + iy)(x - iy)} \\ &= \frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - 2i \frac{xy}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

b) On a :

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{i(x + iy)}{x - iy} \\ &= \frac{-y + ix}{x - iy} \\ &= \frac{(-y + ix)(x + iy)}{(x - iy)(x + iy)} \\ &= \frac{-2xy + i(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{-2xy}{x^2 + y^2} + i \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Exercice n°3

$$\begin{aligned} \text{a) } (7 + 2i) + (9 - 4i) &= 7 + 9 + 2i - 4i \\ &= 16 - 2i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (2i - 3) - (8 + 4i) &= -3 - 8 + 2i - 4i \\ &= -11 - 2i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (2 + 3i)(1 + i) &= 2 \times 1 + 3i^2 + 2 \times i + 3i \times 1 \\ &= 2 - 3 + 5i \\ &= -1 + 5i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (-2 + 4i)(i - 5) &= -2 \times (-5) + 4i^2 - 2i + 4i \times (-5) \\ &= 10 - 4 - 2i - 20i \\ &= 6 - 22i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } (4 - 3i)^2 &= 4^2 + (3i)^2 - 2 \times 4 \times 3i \\ &= 16 - 9 - 24i \\ &= 7 - 24i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } (1 + i)^3 &= (1 + i)^2(1 + i) \\ &= (1 + i^2 + 2i)(1 + i) \\ &= 2i(1 + i) \\ &= 2i + 2i^2 \\ &= -2 + 2i. \end{aligned}$$

Exercice n°4

$$\text{a) } \frac{1 + i}{1 - i} = \frac{(1 + i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2i}{2} = \boxed{i}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{1}{3 + 5i} &= \frac{1(3 - 5i)}{(3 + 5i)(3 - 5i)} \\ &= \frac{3 - 5i}{3^2 + 5^2} \\ &= \boxed{\frac{3}{34} - \frac{5}{34}i}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{2 + i}{3 - 4i} &= \frac{(2 + i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} \\ &= \frac{2 + 11i}{3^2 + 4^2} \\ &= \boxed{\frac{2}{25} + \frac{11}{25}i}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{i - 1}{3 + 2i} &= \frac{(-1 + i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} \\ &= \frac{-1 + 5i}{3^2 + 2^2} \\ &= \boxed{-\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \frac{5 + 3i}{2i - 1} &= \frac{(5 + 3i)(-1 - 2i)}{(-1 + 2i)(-1 - 2i)} \\ &= \frac{1 - 13i}{(-1)^2 + 2^2} \\ &= \boxed{\frac{1}{5} - \frac{13}{5}i}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \frac{3i - 4}{4i - 3} &= \frac{(-4 + 3i)(-3 - 4i)}{(-3 + 4i)(-3 - 4i)} \\ &= \frac{24 + 7i}{(-3)^2 + 4^2} \\ &= \boxed{\frac{24}{25} + \frac{7}{25}i}. \end{aligned}$$

Exercice n°5

Soit z un nombre complexe non nul.

$$\begin{aligned} \bar{iz} + \frac{z + 2\Re(z) - \bar{z}}{iz} &= \bar{iz} + \frac{2}{z} \times \frac{z - \bar{z}}{2i} + \frac{2\Re(z)}{iz} \\ &= \bar{iz} + \frac{2}{z} \times \Im(z) + \frac{2\Re(z)}{iz} \times \frac{i}{i} \\ &= \bar{iz} + \frac{2\Im(z)}{z} - \frac{2i\Re(z)}{z} \\ &= \bar{iz} + \frac{2i}{z} \left(-\Re(z) + \frac{\Im(z)}{i} \right) \\ &= \bar{iz} + \frac{2i}{z} \left(-\Re(z) + \frac{i\Im(z)}{i^2} \right) \\ &= \bar{iz} + \frac{2i}{z} (-\Re(z) - i\Im(z)) \\ &= \bar{iz} - \frac{2i}{z} (\Re(z) + i\Im(z)) \\ &= \bar{iz} - \frac{2i}{z} \times z \\ &= -i\bar{z} - 2i. \quad (\text{car } \bar{i} = -i) \end{aligned}$$

Exercice n°6

1. $(2-i)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} 2^k \times (-i)^{5-k}$
 $= \binom{5}{0} 2^0 (-i)^5 + \binom{5}{1} 2^1 (-i)^4 + \binom{5}{2} 2^2 (-i)^3$
 $+ \binom{5}{3} 2^3 (-i)^2 + \binom{5}{4} 2^4 (-i)^1 + \binom{5}{5} 2^5 (-i)^0$
 $= -i + 10 + 40i - 80 - 80i + 32$
 $(2-i)^5 = -38 - 41i.$
2. $(2+i)^5 = \overline{(2-i)^5}$
 $= \overline{-38 - 41i}$ d'après la question 1
 $(2+i)^5 = -38 + 41i.$
3. $(1+2i)^4 = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} 1^k \times (2i)^{4-k}$
 $= \binom{4}{0} 1^0 \times (2i)^4 + \binom{4}{1} 1^1 \times (2i)^3$
 $+ \binom{4}{2} 1^2 \times (2i)^2 + \binom{4}{3} 1^3 \times (2i)^1$
 $+ \binom{4}{4} 1^4 \times (2i)^0$
 $= 16 - 32i - 24 + 8i + 1$
 $(1+2i)^4 = -7 - 24i.$
4. $(1+2i)^8 = [(1+2i)^4]^2$
 $= (-7 - 24i)^2$ d'après la question 3
 $= 49 + 2 \times 7 \times 24i + (24i)^2$
 $(1+2i)^8 = -527 + 336i.$

Exercice n°7

- a) $(1+i)z = 2 \iff z = \frac{2}{1+i}$
 $\iff z = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}$
 $\iff z = \frac{2-2i}{1^2+1^2}$
 $\iff \boxed{z = 1-i}.$
- b) $(3-5i)z = 3+5i \iff z = \frac{3+5i}{3-5i}$
 $\iff z = \frac{(3+5i)^2}{3^2+5^2}$
 $\iff z = \frac{9-25+30i}{34}$
 $\iff \boxed{z = -\frac{8}{17} + \frac{15}{14}i}.$
- c) $z^2 + 3z + \frac{25}{4}$ a pour discriminant :

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times \frac{25}{4} = 9 - 25 = -16 < 0$$

donc les solutions de l'équation $z^2 + 3z + \frac{25}{4} = 0$ sont :

$$z_1 = \frac{-3 - i\sqrt{16}}{2} = \boxed{-\frac{3}{2} - 2i} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \boxed{-\frac{3}{2} + 2i}.$$

- d) $-3z^2 + 5z - 6 = 0$. Le discriminant de $-3z^2 + 5z - 6$ est :

$$\Delta = 5^2 - 4 \times (-3) \times (-6) = 25 - 72 = -47 < 0$$

donc l'équation admet deux racines complexes :

$$z_1 = \frac{-5 - i\sqrt{47}}{-6} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-5 + i\sqrt{47}}{-6}$$

soit,

$$\boxed{z_1 = \frac{5 + i\sqrt{47}}{6} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{5 - i\sqrt{47}}{6}}.$$

- e) $2z^2 - 3z + \frac{17}{4} = 0$. Le discriminant de $2z^2 - 3z + \frac{17}{4}$ est :

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{17}{4} = 9 - 34 = -25 < 0$$

donc l'équation admet deux racines complexes :

$$z_1 = \frac{3 - i\sqrt{25}}{4} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{3 + i\sqrt{25}}{4}$$

soit,

$$\boxed{z_1 = \frac{3-5i}{4} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{3+5i}{4}}.$$

- f) $100z^2 + 20z + 37 = 0$. Le discriminant de $100z^2 + 20z + 37$ est :

$$\Delta = (20)^2 - 4 \times 100 \times 37 = 400 - 400 \times 37 = -400 \times 36 = -120^2 < 0$$

donc l'équation admet deux racines complexes :

$$z_1 = \frac{-20 - 120i}{200} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-20 + 120i}{200}$$

soit,

$$\boxed{z_1 = \frac{-1-6i}{10} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1+6i}{10}}.$$

Exercice n°8

1. $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ est la solution de cette équation. En effet,

$$z(1-i) = -1-2i \iff z = \frac{-1-2i}{1-i} = \frac{(-1-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i.$$

2. $\frac{15}{13} + \frac{3}{13}i$ est la solution de cette équation. En effet,

$$z-1 = \frac{i}{3+2i} = \frac{i(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i.$$

On en déduit que

$$z = \frac{15}{13} + \frac{3}{13}i.$$

3. $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$ est la solution de cette équation. En effet,

$$(2-i-3-2i)z = -i-1$$

$$\iff (-1-3i)z = -i-1$$

$$\iff z = \frac{-i-1}{-1-3i} = \frac{(-i-1)(-1+3i)}{(-1-3i)(-1+3i)} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i.$$

4. On distingue deux cas. D'abord, $z = 0$ est solution de l'équation. Si $z \neq 0$, alors on peut simplifier par z et l'équation est équivalente à

$$(4-2i)z = 1+5i$$

$$\iff z = \frac{1+5i}{4-2i} = \frac{(1+5i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)} = \frac{-6+22i}{20} = \frac{-3}{10} + \frac{11}{10}i.$$

L'équation admet donc deux solutions, $z = 0$ et $z = \frac{-3}{10} + \frac{11}{10}i$.

Exercice n°9

Posons $z = a + ib$. Alors,

$$\begin{aligned} f(z) &= i(a + ib) \\ &= ai + i^2b \\ f(z) &= -b + ia. \end{aligned}$$

Exercice n°10

En effet, en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = iu_n$, on obtient une suite géométrique de raison i :

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \dots + u_{100} &= S = \frac{1 - i^{100+1}}{1 - i} \\ &= \frac{1 - i^{101}}{1 - i} \\ &= \frac{1 - i^{25 \times 4 + 1}}{1 - i} \\ &= \frac{1 - (i^4)^{25} \times i}{1 - i} \\ &= \frac{1 - 1^{25} \times i}{1 - i} \text{ car } i^4 = 1 \\ &= \frac{1 - i}{1 - i} \\ S &= 1. \end{aligned}$$

Exercice n°11

$$\begin{aligned} \frac{(1-i)(1+i)}{(1-2i)(1+2i)} &= \frac{1^2 - i^2}{1^2 - (2i)^2} \\ &= \frac{1+1}{1+4} \\ \frac{(1-i)(1+i)}{(1-2i)(1+2i)} &= \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Exercice n°12

On considère l'équation suivante :

$$z^3 - 3z + 4i = 0. \quad (E)$$

1. On calcule :

$$i^3 - 3i + 4i = -i - 3i + 4i = 0.$$

i est donc bien une solution de (E) .

1. Développons :

$$\begin{aligned} (z-i)(z^2 + bz + c) &= z^3 + bz^2 + cz - iz^2 - biz + ci \\ &= z^3 + (b-i)z^2 + (c-bi)z - ci. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} z^3 - 3z + 4i &= (z-i)(z^2 + bz + c) \\ \iff z^3 - 3z + 4i &= z^3 + (b-i)z^2 + (c-bi)z - ci \\ \iff \begin{cases} b-i &= 0 \\ c-bi &= -3 \\ -ci &= 4i \end{cases} \\ \iff \begin{cases} b &= i \\ c &= -4 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où :

$$(E) \iff (z-i)(z^2 + iz - 4) = 0.$$

2. Le discriminant de $z^2 + iz - 4$ est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (i)^2 - 4 \times (-4) = -1 + 16 = 15.$$

Donc ses racines sont :

$$z_1 = \frac{-i + \sqrt{15}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-i - \sqrt{15}}{2}.$$

Les solutions de (E) (sous la forme algébrique) sont donc :

$$\boxed{i \quad ; \quad -\frac{\sqrt{15}}{2} - \frac{1}{2}i \quad ; \quad \frac{\sqrt{15}}{2} - \frac{1}{2}i.}$$

Exercice n°13

$$\begin{aligned} (a+ib)^2 = i &\iff a^2 - b^2 + 2abi = i \\ &\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ b = \frac{1}{2a} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a^2 - \left(\frac{1}{2a}\right)^2 = 0 \\ b = \frac{1}{2a} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2a^4 - 1 = 0 \\ b = \frac{1}{2a} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a^4 = \frac{1}{2} \text{ soit } a^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ b = \frac{1}{2a} \end{cases} \end{aligned}$$

Simplifions l'écriture de a en considérant que $\sqrt{2} = 2^{1/2}$, et donc que $\sqrt{\sqrt{2}} = (2^{1/2})^{1/2} = 2^{1/4}$.

$$\text{Ainsi, } a = \pm \frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \pm \frac{2^{1/4}}{2^{1/2}} = \pm 2^{-1/2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Alors, } b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On obtient finalement :

$$\boxed{\sqrt{i} = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)}.$$

Attention ! Cette notation $\sqrt{i}$ est fortement déconseillée. Car, déterminer la racine carrée d'un nombre complexe z revient à résoudre l'équation $z^2 = a + ib$ et cette équation admet deux solutions dans $\mathbb{C}$.

Par ailleurs, la forme algébrique d'un nombre complexe est unique, donc cette écriture $\sqrt{i} = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$ n'est pas correcte.

Une fois que vous avez compris cela, vous pouvez utiliser quand même cette notation pour aller un peu plus vite dans le raisonnement.

Exercice n°14

Nous allons nous inspirer de ce qui a été fait dans l'exercice permettant d'obtenir $\sqrt{i}$.

Cherchons les réels a et b tels que $(a + ib)^2 = -7 + 24i$.

$$(a + ib)^2 = -7 + 24i \iff a^2 - b^2 + 2abi = -7 + 24i$$

$$\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -7 \\ 2ab = 24 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -7 \\ b = \frac{12}{a} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a^2 - \left(\frac{12}{a}\right)^2 = -7 \\ b = \frac{12}{a} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a^4 - 144 = -7a^2 \\ b = \frac{12}{a} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a^4 + 7a^2 - 144 = 0 \\ b = \frac{12}{a} \end{cases}$$

Considérons l'équation :

$$a^4 + 7a^2 - 144 = 0 \quad (E)$$

En posant $A = a^2$,

$$(E) \iff A^2 + 7A - 144 = 0.$$

Le discriminant de cette dernière équation est :

$$\Delta = 7^2 - 4 \times (-144) = 625 = 25^2$$

donc :

$$A = \frac{-7 \pm 25}{2} \quad \text{soit} \quad A = -16 \text{ ou } A = 9.$$

Or, $A = a^2 \geq 0$ donc seule $A = 9$ est possible, soit $a = \pm 3$. Ainsi, $b = \pm \frac{12}{3} = \pm 4$.

Finalement,

$$\boxed{\sqrt{-7 + 24i} = \pm(3 + 4i)}.$$

Attention ! Cette notation $\sqrt{-7 + 24i}$ est fortement déconseillée. Car, déterminer la racine carrée d'un nombre complexe z revient à résoudre l'équation $z^2 = a + ib$ et cette équation admet deux solutions dans $\mathbb{C}$.

Par ailleurs, la forme algébrique d'un nombre complexe est

unique, donc cette écriture $\sqrt{-7 + 24i} = \pm(3 + 4i)$ n'est pas correcte.

Une fois que vous avez compris cela, vous pouvez utiliser quand même cette notation pour aller un peu plus vite dans le raisonnement.

Exercice n°15

On a :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2z_1 - z_2 = i \\ -2z_1 + 3iz_2 = -17 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 2z_1 - z_2 = i \\ (3i - 1)z_2 = -17 + i \text{ (L1)+(L2)} \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 2z_1 = i + z_2 \\ z_2 = \frac{-17+i}{3i-1} \end{cases} \end{aligned}$$

On met z_2 sous forme algébrique en multipliant numérateur et dénominateur par $-3i-1$ et on trouve $z_2 = 2 + 5i$. Finalement, revenant à z_1 , on trouve que $z_1 = 1 + 3i$. Le système admet une unique solution donnée par $z_1 = 1 + 3i$ et $z_2 = 2 + 5i$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3iz_1 + iz_2 = i + 7 \\ iz_1 + 2z_2 = 11i \end{cases} & \iff \begin{cases} 3iz_1 + iz_2 = i + 7 \\ 3iz_1 + 6z_2 = 33i \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} (i - 6)z_2 = 7 - 32i \\ iz_1 + 2z_2 = 11i \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc $z_2 = \frac{7-32i}{i-6} = -2 + 5i$ après mise sous forme algébrique. On en déduit facilement que $z_1 = 1 - 4i$. Ce second système admet donc une unique solution donnée par $z_1 = 1 - 4i$ et $z_2 = -2 + 5i$.