

Corrigés

Série d'exercices

Classe : Maths Expertes

Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

1. $\dim(A) = \dim(C) = 2 \times 3$.
 $\dim(B) = \dim(D) = 3 \times 2$.
2. Les seules sommes que l'on peut faire avec ces matrices sont :
 — $A + C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
 — $B + D = B + (-B) = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $B + 2D = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -4 & 2 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} = D$$

On aurait aussi pu écrire :

$$B + 2D = B + 2(-B) = B - 2B = -B = D.$$

Exercice n°2

$$A \times B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 11 & -7 \end{pmatrix}.$$

On peut alors constater que $AB \neq BA$, ce qui signifie que dans un cas général, le produit de deux matrices n'est pas commutatif.

Exercice n°3

On calcule :

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 21 - 20 & 28 - 28 \\ -15 + 15 & -20 + 21 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 - 20 & -12 + 12 \\ 35 - 35 & -20 + 21 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Ainsi, A et B sont inverses l'une de l'autre.

Exercice n°4

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.
 $ad - bc = 3 - (-24) = 27 \neq 0$ donc A^{-1} existe et :

$$A^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -4 & 1 \end{pmatrix},$$

2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
 $ad - bc = 1 - 1 = 0$ donc A n'est pas inversible.
3. $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.
 $ad - bc = -35 - 4 = -39 \neq 0$ donc A est inversible et son inverse est :

$$A^{-1} = -\frac{1}{39} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{39} \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},$$

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 $ad - bc = 0 - 1 = -1 \neq 0$ donc A est inversible et son inverse est :

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

Exercice n°5

1. On obtient :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

2. — **Initialisation** : l'égalité est vraie pour $n = 1$.
 — **Hérédité** : supposons que pour un entier k fixé,

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Alors,

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1+k & 1+k+\frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & 1+k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1+k & (k+1)\left[1+\frac{k}{2}\right] \\ 0 & 1 & 1+k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1+k & \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

L'hérédité est alors vérifiée.

L'égalité est donc vraie pour tout entier naturel n .

3. Si $n = -1$, l'égalité précédente devient :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Or,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3, \end{aligned}$$

Ainsi, A^{-1} désigne bien l'inverse de A .

Exercice n°6

1. On trouve : $A^2 - 3A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que

l'on peut aussi noter :

$$A^2 - 3A + 2I_3 = 0.$$

2. De l'égalité obtenue précédemment, on peut en déduire que :

$$A^2 - 3A = -2I_3$$

soit,

$$A(A - 3I_3) = -2I_3 \quad \text{ou} \quad (A - 3I_3)A = -2I_3$$

et donc,

$$A \times \left[-\frac{1}{2}(A - 3I_3) \right] = I_3 \text{ ou } \left[-\frac{1}{2}(A - 3I_3) \right] \times A = I_3.$$

On en déduit alors que A est inversible et que son inverse est :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= -\frac{1}{2}(A - 3I_3) \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0-3 & 1 & -1 \\ -3 & 4-3 & -3 \\ -1 & 1 & 0-3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice n°7

1. On vérifie que $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -18 \\ 6 & 18 & -18 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$ (matrice nulle).

2. $A^n = (N + I_3)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k}$.

Attention ! la formule du binôme de Newton fonctionne ici car $N \times I_3 = I_3 \times N$.

Dans un cas général, le produit matriciel étant non commutatif, elle ne Or,

$$\forall k \geq 3, N^k = 0$$

donc :

$$\begin{aligned} A^n &= \binom{n}{0} N^0 I_3^n + \binom{n}{1} N^1 I_3^{n-1} + \binom{n}{2} N^2 I_3^{n-2} \\ &= I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \\ A^n &= \begin{pmatrix} 3n+1 & 9n & -9n \\ 3n^2-n & 9n^2-9n+1 & -9n^2+9n \\ 3n^2 & 9n^2-6n & -9n^2+6n+1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice n°8

1. $\begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ -4x + 2y = 1 \end{cases} \iff AX = B$,
avec $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi,

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{5}{14} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{3}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{14} \\ -\frac{31}{14} \end{pmatrix}.$$

On trouve alors $x = -\frac{19}{14}$ et $y = -\frac{31}{14}$.

2. $\begin{cases} 5x + 4y = -1 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \iff AX = B$,
avec $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi,

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{17} & \frac{4}{17} \\ -\frac{3}{17} & -\frac{5}{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{17} \\ -\frac{13}{17} \end{pmatrix}.$$

On trouve alors $x = \frac{7}{17}$ et $y = -\frac{13}{17}$.

3. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 3 \end{cases} \iff AX = B$,
avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ainsi,

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On trouve alors $x = \frac{5}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$ et $z = -1$.

$$4. \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ x - 2y - 3z = -6 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \iff AX = B,$$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{14} & -\frac{5}{14} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{1}{14} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{12}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}.$$

On trouve : $x = 0$, $y = \frac{12}{7}$ et $z = \frac{6}{7}$.

Exercice n°9

À l'aide de votre calculatrice et en associant à chacun des systèmes suivant sa matrice, trouver leurs solutions.

$$1. \text{ Le système } \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases} \text{ peut être écrit sous la forme matricielle } AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Il admet un unique couple de solutions si A est inversible.

À la calculatrice, on trouve : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ donc

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'unique solution du système est donc le couple $(-1; 1)$.

$$2. \text{ Le système } \begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ 2x - 7y = 5 \end{cases} \text{ peut être écrit sous la forme matricielle } AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Il admet un unique couple de solutions si A est inversible.

À la calculatrice, on trouve : $A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ donc

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 24 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

L'unique solution du système est donc le couple $\left(\frac{24}{11}; -\frac{1}{11}\right)$.

$$3. \text{ Le système } \begin{cases} -x + 2y = -1 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases} \text{ peut être écrit sous la forme matricielle } AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il admet un unique couple de solutions si A est inversible.

À la calculatrice, on trouve : $A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ donc

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

L'unique solution du système est donc le couple $\left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{8}\right)$.

$$4. \text{ Le système } \begin{cases} 5x + 4y = -3 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases} \text{ peut être écrit sous la forme matricielle } AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Il admet un unique couple de solutions si A est inversible.

À la calculatrice, on trouve : $A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ donc

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -16 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

L'unique solution du système est donc le couple $\left(-4; \frac{17}{4}\right)$.

$$5. \text{ Le système } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases} \text{ peut être écrit sous la forme matricielle } AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Il admet un unique couple de solutions si A est inversible.

À la calculatrice, on trouve : $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$\text{donc } X = A^{-1}B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

L'unique solution du système est donc le triplet $\left(\frac{2}{3}; 1; \frac{2}{3}\right)$.

$$6. \text{ Le système } \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \text{ peut être écrit sous la forme matricielle } AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il admet un unique couple de solutions si A est inversible.

À la calculatrice, on trouve : $A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & -8 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\text{donc } X = A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

L'unique solution du système est donc le triplet $\left(-\frac{1}{2}; 0; \frac{3}{2}\right)$.

Exercice n°10

1. $A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,6 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$

2. — **Initialisation** : $U_1 = AU_0$ par définition de A donc l'initialisation est réalisée.

— **Hérédité** : on suppose que pour un entier naturel k fixé, $U_k = A^k U_0$.

Alors, $U_{k+1} = AU_k = A \times A^k U_0 = A^{k+1} U_0$.

L'hérédité est alors vérifiée. Ainsi, pour tout entier naturel n , $U_n = A^n U_0$.

3. $A^2 = \begin{pmatrix} 0,67 & 0,66 \\ 0,33 & 0,34 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0,667 & 0,666 \\ 0,333 & 0,334 \end{pmatrix}$ et $A^4 = \begin{pmatrix} 0,6667 & 0,6666 \\ 0,3333 & 0,3334 \end{pmatrix}$.

On peut supposer alors que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} a_n = \frac{2}{3}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} b_n = \frac{1}{3}$.

Exercice n°11

On considère les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \end{cases},$$

Pour tout entier naturel n , on définit la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

2. — **Initialisation** : $U_1 = AU_0$ par définition de A donc l'initialisation est réalisée.

— **Hérédité** : on suppose que pour un entier naturel k fixé, $U_k = A^k U_0$.

Alors, $U_{k+1} = AU_k = A \times A^k U_0 = A^{k+1} U_0$.

L'hérédité est alors vérifiée. Ainsi, pour tout entier naturel n , $U_n = A^n U_0$.

3. À la calculatrice (par exemple), on vérifie que $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc P et Q sont inverses l'une de l'autre.

4. Si $A = QDP = P^{-1}DP$, alors $PA = PP^{-1}DP = DP$ et $PAP^{-1} = DPP^{-1} = D$.

On trouve alors $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

5. On en déduit que $A^n = (QDP)^n = QD^nP$ et donc $U_n = A^n U_0 = QD^n P U_0$.

En effectuant le calcul, on trouve ce qui est demandé.

6. On trouve alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{3}{5}$.

Exercice n°12

1. Raisonnons par récurrence.

— Initialisation : évidente car $u_1 = 1$ et $2^1 = 2$.

— Hérédité : on suppose que pour un entier $k \geq 1$

fixé, $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$.

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_k + 2^k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_{k+1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix}.$$

L'hérédité est alors vérifiée. L'égalité est alors vraie pour tout $n \geq 1$.

2. $u_{n+1} - u_n = 2^n$ donc $\sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$.

Ainsi, $u_n - u_1 = \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$, soit $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$.

Par conséquent, $u_n = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^{n-1} - 1$.

On a alors :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^n - 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix},$$

Exercice n°13

On considère un polynôme de degré 3 dont la courbe représentative passe par les points de coordonnées :

$$A(-2; -1), \quad B(-1; 3), \quad C(1; 5), \quad D(2; 34).$$

Donner l'expression de ce polynôme.

Notons $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ le polynôme cherché, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

— $A(-2; -1) \in \mathcal{C} \iff P(-2) = -1$
 $\iff a(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) + d = -1$
 $\iff -8a + 4b - 2c + d = -1$.

— $B(-1; 3) \in \mathcal{C} \iff P(-1) = 3$
 $\iff a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d = 3$
 $\iff -a + b - c + d = 3$.

— $C(1; 5) \in \mathcal{C} \iff P(1) = 5$
 $\iff a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + d = 5$
 $\iff a + b + c + d = 5$.

— $D(2; 34) \in \mathcal{C} \iff P(2) = 34$
 $\iff a(2)^3 + b(2)^2 + c(2) + d = 34$
 $\iff 8a + 4b + 2c + d = 34$.

En notant :

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 34 \end{pmatrix}$$

On a :

$$AX = B \iff X = A^{-1}B,$$

À l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$P(x) = \frac{31}{12}x^3 + \frac{25}{6}x^2 - \frac{19}{12}x - \frac{1}{6}.$$

Exercice n°14

On considère un mot constitué de lettres : $L_1 L_2 \cdots L_n$, n étant pair.

Soient 4 nombres a, b, c et d qui vont constituer la clé du chiffrement.

On remplace L_i par sa position dans l'alphabet en convenant d'avoir 0 pour A, 1 pour B, etc. On obtient alors une suite de nombres : $u_1, u_2, \dots, u_n$. On pose alors :

$$\forall k \in \llbracket 1, \frac{n}{2} \rrbracket, \begin{pmatrix} c_{2k-1} \\ c_{2k} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2k-1} \\ u_{2k} \end{pmatrix} \pmod{26}$$

On obtient une suite de nombres $c_1, c_2, \dots, c_n$ qui correspond à une suite de lettres.

Choisissons la clé matricielle $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$.

1. On a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 17 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 15 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 125 \\ 225 \end{pmatrix} & &= \begin{pmatrix} 177 \\ 243 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} 21 \\ 17 \end{pmatrix} \pmod{26} & &\equiv \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \end{pmatrix} \pmod{26} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} V \\ R \end{pmatrix} & &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} V \\ J \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, « CRYP » est chiffré en « VRVJ ».

2. Le déchiffrement consiste à trouver les u_k avec la relation :

$$\forall k \in \llbracket 1, \frac{n}{2} \rrbracket, \begin{pmatrix} u_{2k-1} \\ u_{2k} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c_{2k-1} \\ c_{2k} \end{pmatrix} \pmod{26}$$

$$\text{On trouve : } \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 13 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il nous faut trouver la valeur de $\frac{1}{25}$ modulo 26, c'est-à-dire le nombre x tel que $25 \times x \equiv 1 \pmod{26}$. Or, $25 \equiv -1 \pmod{26}$ donc $25 \times 25 \equiv 1 \pmod{26}$. Ainsi, l'inverse de 25 modulo 26 est égal à 25 (ou -1 si on veut ... ce qui va

nous arranger pour le calcul suivant).

On a alors :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}^{-1} &\equiv 25 \begin{pmatrix} 13 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \pmod{26} \\ &\equiv -1 \begin{pmatrix} 13 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \pmod{26} \\ &\equiv \begin{pmatrix} -13 & 7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \pmod{26} \\ &\equiv \begin{pmatrix} 13 & 7 \\ 2 & 23 \end{pmatrix} \pmod{26} \end{aligned}$$

Exercice n°15

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par ses deux premiers termes $u_0 = 3$ et $u_1 = 1$, et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n,$$

On pose alors :

$$U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

et la matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$.

1. On a : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En effet,

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix},$$

2. On a :

$$- A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$- A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2.$$

On peut alors en déduire que $(-A^2)A = I_2$ et $A(-A^2) = I_2$ donc l'inverse de A est :

$$A^{-1} = -A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

3. De la question précédente, on peut déduire que :

$$- A^4 = A \times A^3 = A \times (-I_2) = -A;$$

$$- A^5 = A^4 \times A = -A \times A = -A^2;$$

$$- A^6 = A^5 \times A = -A^2 \times A = -A^3 = -(-I_2) = I_2.$$

On en déduit alors que, pour tout entier naturel k ,

$$- A^{6k} = I_2; \quad - A^{6k+3} = A^3 = -A^{6k+5} = -A^2.$$

$$- A^{6k+1} = A; \quad - I_2;$$

$$- A^{6k+2} = A^2; \quad - A^{6k+4} = -A;$$

Or, $U_{n+1} = AU_n$ donc $U_n = A^n U_0$.

$$- \text{Si } n \equiv 0 \pmod{6}, U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$- \text{Si } n \equiv 2 \pmod{6}, U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$- \text{Si } n \equiv 4 \pmod{6}, U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{D'où : } u_{6k} = 3, u_{6k+1} = 1, u_{6k+2} = -2, u_{6k+3} = -3, u_{6k+4} = -1, u_{6k+5} = 2,$$

On dit qu'une telle suite est *périodique* de période 6, c'est-à-dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+6} = u_n,$$