

Exercice n° 1

On sait que : $K_n = \frac{n(n-1)}{2}$, où K_n est le nombre d'arêtes du graphe complet à n sommets.

$$1. \quad n = 10 \text{ donc } K_{10} = \frac{10 \times 9}{2} = 45.$$

$$2. \quad n = 5 \text{ donc } K_5 = \frac{5 \times 4}{2} = 10.$$

$$3. \quad n = 300 \text{ donc } K_{300} = \frac{300 \times 299}{2} = 44\,850.$$

$$4. \quad n = 75 \text{ donc } K_{75} = \frac{75 \times 74}{2} = 2\,775.$$

Exercice n° 2

1. La matrice d'adjacence est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il y a donc 5 chaînes de longueur 3 qui vont de A à E.

2. La matrice d'adjacence est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donc

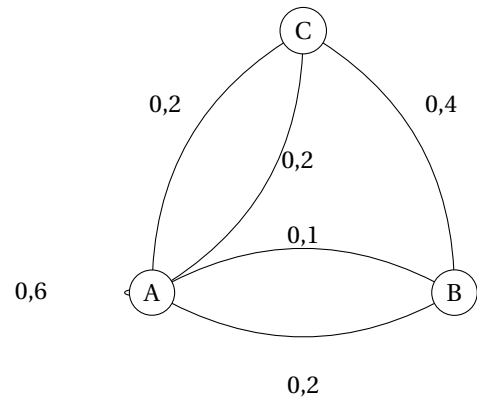
$$M^3 = \begin{pmatrix} 13 & 13 & 13 & 9 & 13 \\ 13 & 11 & 12 & 10 & 12 \\ 13 & 12 & 11 & 10 & 12 \\ 9 & 10 & 10 & 6 & 10 \\ 13 & 12 & 12 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

Il y a donc 11 chaînes de longueur 3 qui vont de C à C.

Exercice n° 3

Les sites internet A, B, C ont des liens entre eux. Un internaute connecté sur un de ces trois sites peut soit y rester soit utiliser un lien vers un des deux autres sites.

1. On a le graphe suivant :



2. La matrice M de transition est alors :

$$M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$$

$$3. \quad N_2 = N_0 M^2 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,42 & 0,22 & 0,36 \\ 0,19 & 0,27 & 0,54 \\ 0,28 & 0,04 & 0,68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 22 & 36 \end{pmatrix}.$$

Cela signifie qu'après 2 minutes, il y a 42 internautes sur le site A, 22 sur le site B et 36 sur le site C.

$$4. \quad N_0 \times M^{20} \approx \begin{pmatrix} 31,25 & 12,5 & 56,25 \end{pmatrix} = N_{20}.$$

« 20 » est assez grand pour que l'on puisse assimiler N_{20} à l'état stable.

Cela signifie alors qu'à long terme, il y aura 31,25% des internautes sur le site A, 12,5% sur le site B et 56,25% sur le site C (quel que soit le nombre d'internautes au départ).

5. (a) D'après le graphe, la probabilité de passer de C à A en 1 minute est égale à 0,2.

Ainsi, la probabilité pour qu'à l'instant $t = 1$ le site A soit infecté est égale à 0,2.

(b) Pour que les trois sites soient infectés, il faut que l'internaute utilise le chemin $C \rightarrow B \rightarrow A$ (ce qui est impossible car il ne peut pas passer de C à B) ou le chemin $C \rightarrow A \rightarrow B$, avec une probabilité de $0,2 \times 0,2 = 0,04$.

La probabilité pour que les 3 sites soient infectés à l'instant $t = 2$ est égale à 0,04.

Exercice n° 4

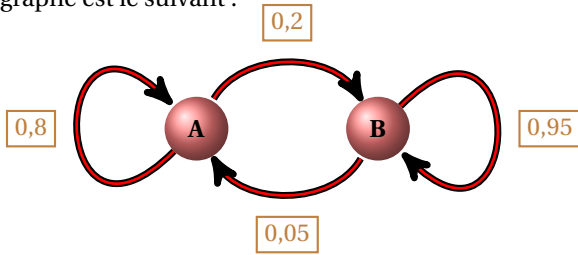
Une région se divise en deux zones :

- une zone A à proximité d'une grande agglomération
- une zone B à proximité de la mer

1. D'après l'énoncé, $P_0 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$.

En effet, en 2010, 40% de la population était dans la zone A, ce qui correspond à une proportion de 0,4.

2. Le graphe est le suivant :



3. (a) La matrice de transition est : $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,05 & 0,95 \end{pmatrix}$.
- (b) La répartition de la population en 2012 est donnée par P_2 .

$$P_1 = P_0 M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,05 & 0,95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,65 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = P_1 M = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,05 & 0,95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3125 & 0,6875 \end{pmatrix}$$

Ainsi, 31,25% de la population habitera en zone A et 68,75% en zone B.

4. (a) On a :

$$P = PM \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,05 & 0,95 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8a + 0,05b & 0,2a + 0,95b \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} 0,8a + 0,05b = a \\ 0,2a + 0,95b = b \end{cases}$$

$$\text{Soit : } 0,05b = 0,2a. \text{ Donc : } b = 4a \quad (1).$$

De plus,

$$a + b = 1 \Leftrightarrow a = 1 - b,$$

Ainsi :

$$(1) \Leftrightarrow b = 4(1 - b),$$

d'où :

$$b = 4 - 4b,$$

On a alors :

$$b = \frac{4}{5} \quad \text{et donc} \quad a = \frac{1}{5},$$

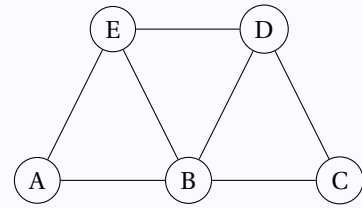
Finalement, on a :

$$P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

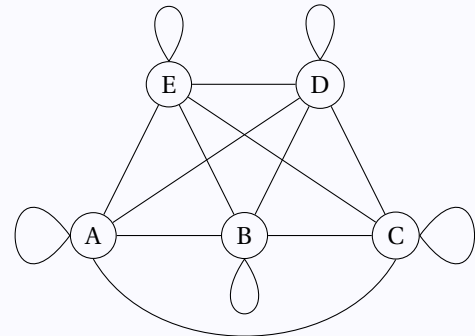
- (b) Le maire a en effet raison de prévoir de nouvelles infrastructures car la proportion d'habitants dans la zone B se rapprochera des 80%.

Exercice n°5

Maison 1. Le graphe est le suivant :



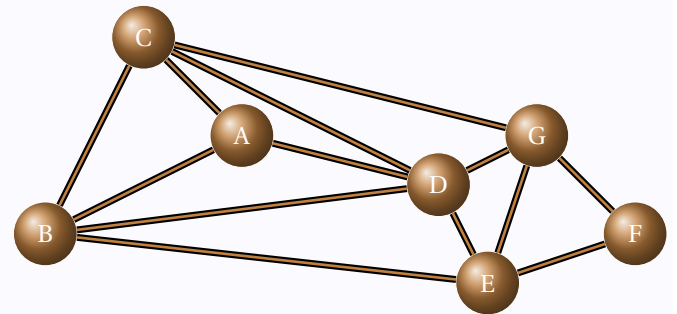
Maison 2. Le graphe est le suivant :



Exercice n°6

Un parc est composé de 7 attractions principales A, B, C, D, E, F et G.

Le graphe ci-dessous représente les liaisons entre elles :



1. Un graphe est *complet* s'il est simple (sans double liaison entre deux mêmes sommets) et si tous les sommets peuvent être reliés deux à deux.

Ce n'est pas le cas ici car B n'est pas relié à G par exemple.

Ce graphe n'est donc pas complet.

2. L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets du graphe. Donc ici, l'ordre du graphe est égal à 7.

3. La matrice d'adjacence du graphe est la suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. La calculatrice nous donne :

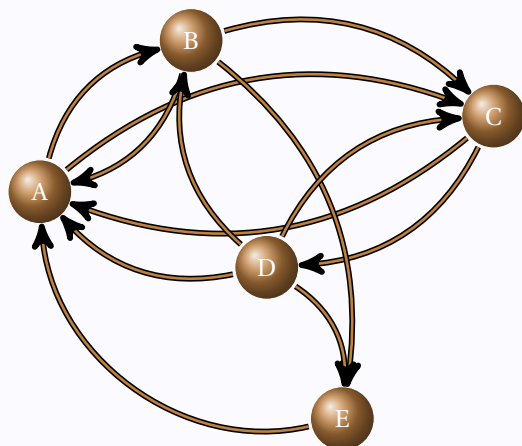
$$M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 9 & 11 & 6 & 4 & 6 \\ 9 & 8 & 12 & 12 & 11 & 4 & 7 \\ 9 & 12 & 8 & 12 & 7 & 4 & 11 \\ 11 & 12 & 12 & 12 & 12 & 4 & 12 \\ 6 & 11 & 7 & 12 & 6 & 6 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 6 & 2 & 6 \\ 6 & 7 & 11 & 12 & 10 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Ainsi, il y a 7 chemins de longueur 3 reliant E à C.

Rappel. Le coefficient de M^n situé à la i -ème ligne et j -ème colonne (ou à la j -ème ligne et i -ème colonne) est le nombre de chemins de longueur n reliant les sommets ayant pour position i et j dans la matrice d'adjacence.

Exercice n° 7

1. Le graphe est le suivant :



2. En convenant de respecter l'ordre alphabétique, la matrice d'adjacence de ce graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Après avoir calculé M^4 , on voit que le coefficient de la 1^{re} ligne et 1^{re} colonne est 7.

Il y a donc 8 chemins possibles pour passer de la page A à la page A en 4 clics.

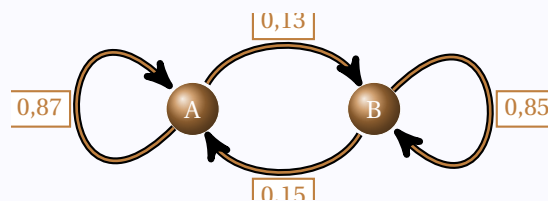
4. Le chemin :

A → B → A → C → D → E → A → C → A → C → D → B → A → C → D → C → D → A

convient, même s'il passe plusieurs fois par les mêmes sommets et s'il emprunte plusieurs fois les mêmes arêtes.

Exercice n° 8

1. Le graphe correspondant à cette situation est le suivant :



2. La matrice de transition est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,87 & 0,13 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$$

3. — On souhaite calculer P_1 :

$$P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,87 & 0,13 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,51 & 0,49 \end{pmatrix} = P_1$$

Ainsi, après 1 année, l'entreprise A détiendra 51% du marché.

— On souhaite calculer P_5 :

$$P_5 = P_0 \times M^5 = \begin{pmatrix} 0,5288 & 0,4712 \end{pmatrix} = P_5$$

Ainsi, après 5 années, l'entreprise A détiendra 52,88% du marché.

4. Notons $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ l'état stable du graphe. Alors, par définition :

$$P = PM \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,87 & 0,13 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix},$$

On arrive ainsi au système suivant :

$$\begin{cases} 0,87a + 0,15b = a \\ 0,13a + 0,85b = b \end{cases}$$

ou encore, en faisant tout passer à gauche :

$$\begin{cases} -0,13a + 0,15b = 0 \\ 0,13a - 0,15b = 0 \end{cases}$$

On obtient ainsi deux équations équivalentes (car la 1^{re} est l'opposée de la 2^{de}).

De plus, $a + b = 1$ car a et b sont les deux seules probabilités de notre situation.

On a finalement le système suivant :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 0,13a - 0,15b = 0 \end{cases}$$

que l'on peut aussi écrire de façon matricielle :

$$AX = B, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,13 & -0,15 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Ainsi,

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0,5357 \\ 0,4643 \end{pmatrix}$$

ce qui signifie qu'à longs termes, l'entreprise A possèdera 53,57% du marché.