

Droites du plan et systèmes d'équations

Seconde

maths-mde.fr

- 1 Vecteur directeur d'une droite
- 2 Équation cartésienne d'une droite
- 3 Équation réduite d'une droite
- 4 Résolution de systèmes de deux équations à deux inconnues

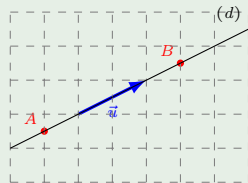
1. Vecteur directeur d'une droite

Définition (Rappel)

Soient A et B deux points distincts d'une droite (d) alors tout vecteur $\vec{u}$ colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé vecteur directeur de la droite (d) .

Exemple

Soient $A(-1; -0,5)$ et $B(3; 1,5)$ alors $\overrightarrow{AB} \left(\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right)$ et donc le vecteur $\vec{u} \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right)$ est un vecteur directeur de la droite (AB) .
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (AB) .



2. Équation cartésienne d'une droite

Propriété

Dans un repère d'un plan, $M(x, y)$ est un point d'une droite (d) dont le vecteur directeur est $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.
 $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de cette droite.

Démonstration

$$\begin{aligned} A(x_A; y_A) \in (d) &\iff \text{les vecteurs } \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} x - x_A & -b \\ y - y_A & a \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \\ &\iff ax + by - ax_A - by_A = 0 \\ &\iff ax + by + c = 0, \text{ avec } -ax_A - by_A = c. \end{aligned}$$

Propriété

L'ensemble des points dont les coordonnées x et y vérifient l'équation $ax + by + c = 0$ est une droite dont un vecteur directeur est $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, avec a et b de réels non nuls.

Exemple 1

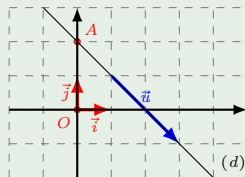
(d) est une droite dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette droite.

Donc, $-2x - 2y + c = 0$ est une équation cartésienne de cette droite, avec c un réel constant.

Or, $A(0; 2) \in (d)$. Ainsi, $-2 \times 0 - 2 \times 2 + c = 0$, soit $c = 4$.

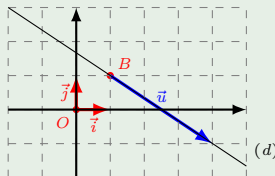
Par conséquent, $-2x - 2y + 4 = 0$ est une équation cartésienne représentant la droite (d) .



Exemple 2

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $2x + 3y - 5 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (d) .

Donc, $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette droite.



Remarque

Une droite admet une infinité d'équations cartésiennes équivalentes.

En effet, pour tout réel $k \neq 0$, $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow k(ax + by + c) = 0$.

3. Équation réduite d'une droite

Soit $ax + by + c = 0$ une équation cartésienne d'une droite (d) .

- Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors l'équation cartésienne devient $y = -\frac{c}{b}$.
- Si $b = 0$ et $a \neq 0$ alors l'équation cartésienne devient $c = -\frac{c}{a}$.
- Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ alors l'équation cartésienne devient $y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$.

Définition

- Toute droite non verticale a une équation réduite de la forme $y = mx + p$ où m s'appelle le coefficient directeur, p l'ordonnée à l'origine et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ un vecteur directeur.
- Toute droite verticale a une équation réduite de la forme $x = k$.

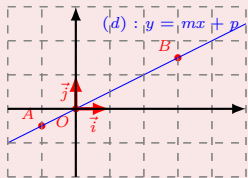
Remarque

Seules les droites non verticales ont une équation qui peut s'écrire sous forme d'une équation réduite.

Propriété

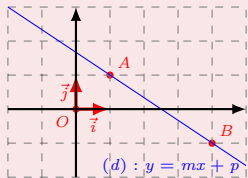
Soit m le coefficient directeur de la droite d'équation réduite $y = mx + p$.

- Si $m > 0$ alors la droite « monte ».
- Si $m < 0$ alors la droite « descend ».
- Si $m = 0$ alors la droite est parallèle à l'axe des abscisses.



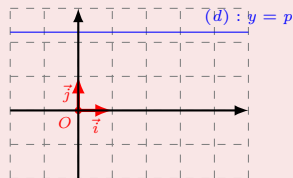
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1, 5 - (-0, 5)}{3 - (-1)} = \frac{2}{4}$$

$m > 0$



$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 1}{-1 - 1} = \frac{3}{-2}$$

$m < 0$



$$m = 0$$

Propriétés

- Deux droites d'équations réduites $y = m_1x + p_1$ et $y = m_2x + p_2$ sont parallèles si et seulement si $m_1 = m_2$.
- Deux droites d'équations cartésiennes $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ sont parallèles si et seulement si $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$.

4. Résolution de systèmes de deux équations à deux inconnues

Propriété

Toute équation du premier degré à deux inconnues possède une infinité de solutions.

$$ax + by + c = 0. \quad (E)$$

L'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ vérifiant l'égalité (E) représente les solutions de cette équation. Graphiquement, cela donne une droite.

Exemple

L'équation cartésienne $x + y + 1 = 0$ admet une infinité de solutions.

$(-0, 5; -0, 5)$ est une solution de cette équation. En effet, $-0, 5 - 0, 5 + 1 = 0$.

$(-2; 1)$ est une solution de cette équation. En effet, $-2 + 1 + 1 = 0$.

Définition

Les systèmes de deux équations à deux inconnues sont définis comme suit :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

où a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2 sont des constantes.

Le couple de nombres réels $(x; y)$ vérifiant les deux équations est appelé la solution de ce système.

Remarque

Résoudre un système revient à déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites dont les équations sont celles du système.

Exemple

Résolution du système
$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2x + 5y = 21 \\ 6x + 2y = -2 \end{array} \right. .$$

L_1 et L_2 désignent les deux équations formant le système.

★ Pour obtenir la valeur de x , il suffit d'éliminer y .

L'observation des coefficients des termes dépendant de y nous suggère l'utilisation de la combinaison $2L_1 - 5L_2$, celle-ci nous permettra de bien éliminer y . Ainsi,

$$2L_1 : 4x + 10y = 42$$

$$\underline{-5L_2 : -30x - 10y = 10} \quad .$$

$$2L_1 - 5L_2 : -26x = 52 \quad \text{On en déduit que } x = -2$$

★ Idem, pour obtenir la valeur de y , il suffit d'éliminer x . On observe que $3L_1 - L_2$, cette combinaison éliminera bien x . Ainsi,

$$3L_1 : 6x + 15y = 63$$

$$\underline{-L_2 : -6x - 2y = 2} \quad .$$

$$3L_1 - L_2 : 13y = 65. \quad \text{On en déduit alors que } y = 5.$$

● Rédaction sur une copie :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2x + 5y = 21 \\ 6x + 2y = -2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} 2L_1 - 5L_2 \\ 3L_1 - L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -26x = 52 \\ 13y = 65 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 5 \end{array} \right. .$$

$$S = \{(-2; 5)\}.$$