

Exercice 1 : (7 points)

Les sept questions sont indépendantes.

1 $f(2) = 2^2 = 4$ et $f(-4) = (-4)^2 = 16$. Donc, $f(-4) > f(2)$.

2 La fonction p est la fonction inverse. En effet,

$$p(x) = \frac{2x+1}{x} - 2 = \frac{2x+1}{x} - \frac{2x}{x} = \frac{\cancel{2x}+1-\cancel{2x}}{x} = \frac{1}{x}.$$

3 Si $-2 \leq x \leq 3$, alors $-3 \times 3 \leq -3x \leq -3 \times (-2)$, soit $-9 \leq -3x \leq 6$.
Par conséquent, $-5 \leq -3x + 4 \leq 10$.

4 Pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{2}{\sqrt{x}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x}^2 = (1)^2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ainsi, $S = \{1\}$.

5 Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \sqrt{5}x - 2 &\leq \sqrt{3}x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{5}x - \sqrt{3}x \leq 1 + 2 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{5} - \sqrt{3})x \leq 3 \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \text{ car, } \sqrt{5} - \sqrt{3} > 0 \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{3(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{3(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{\sqrt{5}^2 - \sqrt{3}^2} \text{ car, } (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{3(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } S = \left] -\infty; \frac{3(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2} \right].$$

6 Soient a et b deux réels positifs. En appliquant la première identité remarquable, on obtient :

$$\begin{aligned} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 - \sqrt{a+b}^2 &= \sqrt{a}^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2 - (a+b) \\ &= a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b - a - b \\ &= -2\sqrt{a}\sqrt{b}. \end{aligned}$$

Or, $-2\sqrt{a}\sqrt{b} < 0$. Donc, $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 - \sqrt{a+b}^2 \leq 0$.

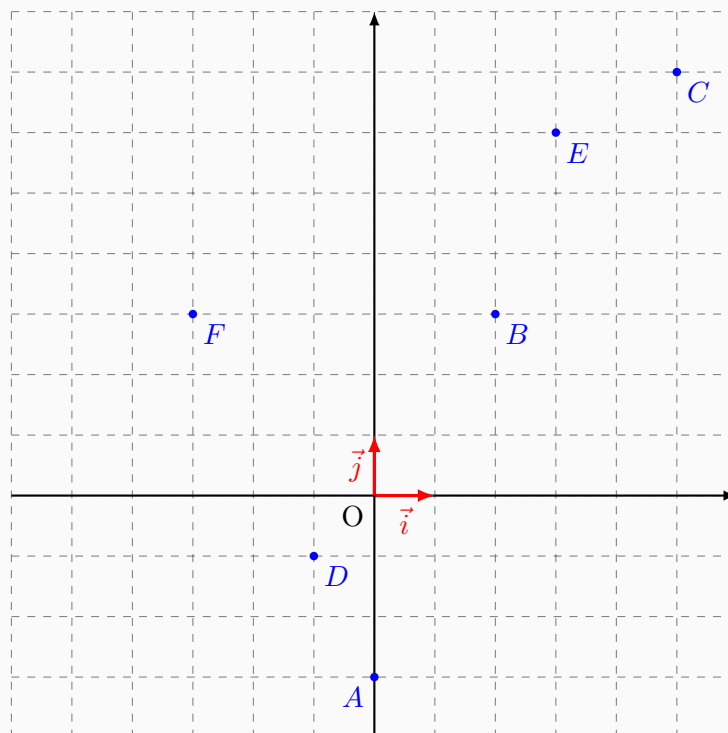
Par conséquent, $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \leq \sqrt{a+b}^2$.

7 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)^2$. Soit $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= (b-1)^2 - (a-1)^2 \\ &= [(b-1) - (a-1)][b-1+a-1] \\ &= [b-1-a+1][b-1+a-1] \\ &= (b-a)(b+a-2). \end{aligned}$$

Exercice 2 : (5 points)

- 1 Dans le repère orthonormé ci-dessous, placer les points $A \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $D \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.



- 2 Soit $\begin{pmatrix} x_E \\ y_E \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_F \\ y_F \end{pmatrix}$ respectivement les coordonnées des points E et F .

$$\overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} x_E - 2 \\ y_E - 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E - 2 = 1 \\ y_E - 3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 3 \\ y_E = 6 \end{cases}.$$

$$\overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} x_F \\ y_F + 3 \end{pmatrix} = 3 \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = -3 \\ y_F + 3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = -3 \\ y_F = 3 \end{cases}.$$

- 3 On a : $\overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} x_E - x_C \\ y_E - y_C \end{pmatrix} = \overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} 3 - 5 \\ 6 - 7 \end{pmatrix} = \overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\text{et } \overrightarrow{CF} \begin{pmatrix} x_F - x_C \\ y_F - y_C \end{pmatrix} = \overrightarrow{CF} \begin{pmatrix} -3 - 5 \\ 3 - 7 \end{pmatrix} = \overrightarrow{CF} \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{De plus, } \det(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CF}) = \begin{vmatrix} -2 & -8 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -2 \times (-4) - (-1) \times (-8) = 0.$$

Ainsi, les points C , E et F sont alignés.

- 4 La distance AB est donnée par l'expression :

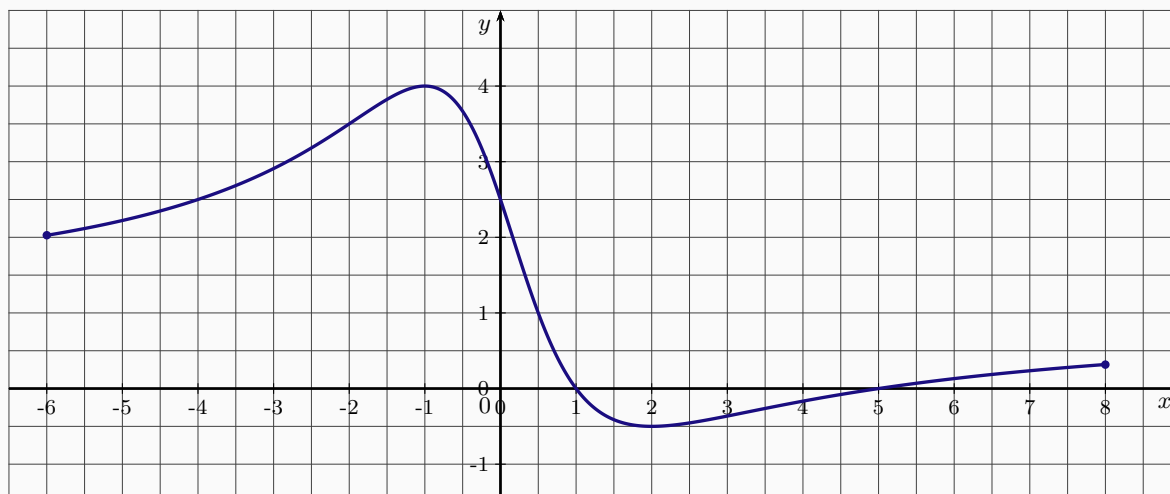
$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(2 - 0)^2 + (3 - (-3))^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{40} \\ &= 2\sqrt{10}. \end{aligned}$$

- 5 Les coordonnées de I le milieu de $[AC]$.

$$I \left(\frac{x_A + x_C}{2} ; \frac{y_A + y_C}{2} \right) \Leftrightarrow I \left(\frac{0 + 5}{2} ; \frac{-3 + 7}{2} \right) \Leftrightarrow I \left(\frac{5}{2} ; 2 \right).$$

Exercice 3 : (5 points)

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[-6; 8]$. La courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f est donnée ci-dessous.



- 1 0 est l'image de 5 par la fonction f .
- 2 $\frac{1}{2}$ est la solution de l'équation $f(x) = 1$.
- 3 $S =]-4 ; 0[$ est l'ensemble de solution de l'inéquation $f(x) > \frac{5}{2}$.
- 4 Tableau de variation de la fonction f .

x	-6	-1	2	8
$f(x)$	2	4	-0.5	0.4

- 5 Si a est un réel de l'intervalle $[-4; 1[$, alors $f(a) \in]0 ; 4]$.

Exercice 3 : (3 points)

On considère une fonction f dont le tableau de variations est le suivant :

x	-10	$-\frac{7}{2}$	1	2	$\frac{17}{3}$	8
$f(x)$	-2	-5	0	-3	0	4

- 1 La fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{7}{2} ; 1\right]$.
De plus, $-\frac{7}{2} < -2 < \frac{1}{3} < 1$. Ainsi, $f(-2) < f\left(\frac{1}{3}\right)$.
- 2 D'une part, $0 \in \left[-\frac{7}{2} ; 1\right]$ et f est croissante $\left[-\frac{7}{2} ; 1\right]$.
D'autre part, $\frac{3}{2} \in [1 ; 2]$ et f est décroissante sur $[1 ; 2]$.
On ne peut donc pas comparer $f(0)$ et $f\left(\frac{3}{2}\right)$, car le sens de variation est différent sur les deux

intervalles $\left[-\frac{7}{2} ; 1\right]$ et $[1 ; 2]$.

3 $S = \left] \frac{17}{3} ; 8 \right]$ est l'ensemble de solutions de l'inéquation $f(x) > 0$.