

Exercice 1 : (7 points)

Les sept questions sont indépendantes.

1 La fonction inverse f est décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Or, $4 < 12$, ainsi, $f(4) > f(12)$.

2 La fonction p est la fonction inverse. En effet,

$$p(x) = \frac{x+1}{x} - 1 = \frac{x+1}{x} - \frac{x}{x} = \frac{x+1-x}{x} = \frac{1}{x}.$$

3 Si $-2 \leq x \leq 3$, alors $-2 \times 3 \leq -2x \leq -2 \times (-2)$, soit $-6 \leq -2x \leq 4$.

Par conséquent, $1 \leq -2x + 7 \leq 11$.

4 Pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = 2 \Leftrightarrow 1 = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ainsi, } S = \left\{ \frac{1}{4} \right\}.$$

5 Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \sqrt{5}x - 3 &\leq \sqrt{2}x + 1 &\Leftrightarrow \sqrt{5}x - \sqrt{2}x &\leq 1 + 3 \\ &&\Leftrightarrow (\sqrt{5} - \sqrt{2})x &\leq 4 \\ &&\Leftrightarrow x &\leq \frac{4}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \quad \text{car, } \sqrt{5} - \sqrt{2} > 0 \\ &&\Leftrightarrow x &\leq \frac{4(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})} \\ &&\Leftrightarrow x &\leq \frac{4(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{\sqrt{5}^2 - \sqrt{2}^2} \quad \text{car, } (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \\ &&\Leftrightarrow x &\leq \frac{4(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } S = \left] -\infty; \frac{4(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{3} \right].$$

6 Soient a et b deux réels positifs. En appliquant la première identité remarquable, on obtient :

$$\begin{aligned} (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - \sqrt{a+b}^2 &= \sqrt{a}^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2 - (a+b) \\ &= a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b - a - b \\ &= 2\sqrt{a}\sqrt{b}. \end{aligned}$$

Or, $2\sqrt{a}\sqrt{b} > 0$. Donc, $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - \sqrt{a+b}^2 \geq 0$.

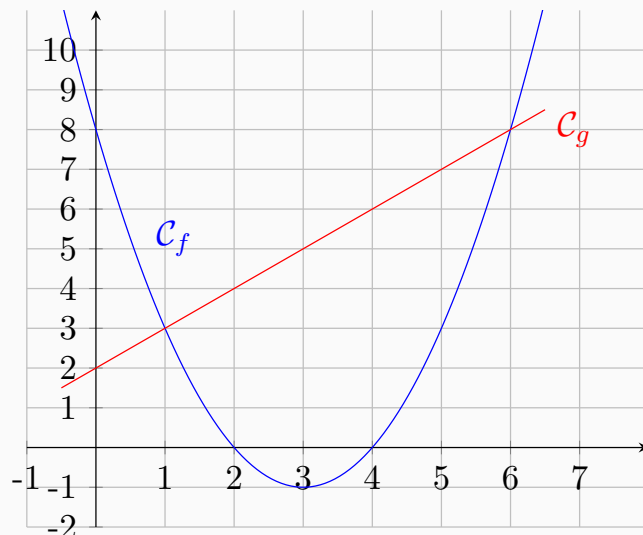
Par conséquent, $\sqrt{a+b}^2 \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$.

7 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-2)^2$. Soit $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= (b-2)^2 - (a-2)^2 \\ &= [(b-2) - (a-2)][b-2+a-2] \\ &= [b-2-a+2][b-2+a-2] \\ &= (b-a)(b+a-4). \end{aligned}$$

Exercice 2 : (11 points)

On donne les représentations graphiques de deux fonctions f et g .



- 1 Voici les domaines de définitions des deux fonctions : $D_f = [-0,5; 6,5]$ et $D_g = [-0,5; 6,5]$.
- 2 $f(0) = 8$, $f(5) = 3$ et $g(3) = 5$.
- 3 1 et 5 sont les deux solutions de cette équation $f(x) = 3$.
- 4 $f(x) \geq 8$ sur l'ensemble $[-0,5; 0] \cup [6; 6,5]$.
- 5 1 et 6 sont les deux solutions de cette équation $f(x) = g(x)$. Ce sont les abscisses des deux points d'intersections de C_g et C_f .
- 6 $f(x) > g(x)$ sur l'ensemble $[-0,5; 1[\cup]6; 6,5]$.
- 7 2 et 5 sont les deux solutions de l'équation $g(x) - f(x) = 4$.
- 8 -1 est le minimum de f , il est atteint quand $x = 3$.
- 9 Tableau de signes.

x	-0.5	3	6.5
$f(x)$	11	-1	11

Tableau de variations.

x	-0.5	2	4	6.5	
$f(x)$	+	0	-	0	+

Exercice 3 : (4 points)

f est une fonction paire définie sur $[-8; 8]$. Elle est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

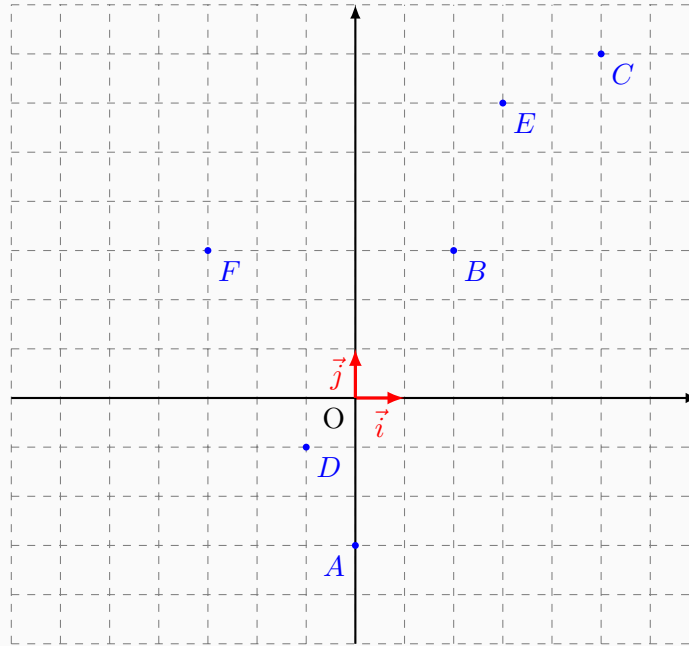
x	-8	-2	0	2	8
$f(x)$	-5	1	-2	1	-5

g est une fonction impaire définie sur $[-6; 6]$. Elle est donc symétrique par rapport à l'origine.

x	-6	-3	0	3	6
$g(x)$		1	0	-1	3

Exercice 4 : (6 points)

- 1 Dans le repère orthonormé ci-dessous, placer les points $A \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $D \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.



$$\begin{aligned} \overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} x_E - 2 \\ y_E - 3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \times 2 \\ \frac{1}{2} \times 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E - 2 = 1 \\ y_E - 3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 3 \\ y_E = 6 \end{cases} \\ \overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} x_F \\ y_F + 3 \end{pmatrix} &= 3 \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 3 \times (-1) \\ 3 \times 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = -3 \\ y_F + 3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = -3 \\ y_F = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

2 $\det(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CF}) = \begin{vmatrix} -2 & -8 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -2 \times (-4) - (-1) \times (-8) = 0.$

Ainsi, les points C , E et F sont alignés.

3 $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
 $AB = \sqrt{(2 - 0)^2 + (3 - (-3))^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$
 $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$
 $AC = \sqrt{(5 - 0)^2 + (7 - (-3))^2} = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}.$
 $BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2}$
 $BD = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5.$