

Exercice 1 : (8 points)

Les sept questions sont indépendantes.

- 1 On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$.

-1 et 1 sont les deux valeurs interdites car $x^2 - 1 \neq 0$. Ainsi, le domaine de définition est : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$.

Par ailleurs, $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ est symétrique par rapport à 0 , car pour tout $x \in D_f$, $-x \in D_f$.

De plus, $f(-x) = \frac{2 \times (-x)}{(-x)^2 - 1} = \frac{-2x}{x^2 - 1} = -f(x)$. Par conséquent, la fonction f est impaire.

- 2 On considère la fonction g définie par : $g(x) = (x - 2)^2 + (x + 2)^2$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut calculer une image par la fonction g . Ainsi, le domaine de définition de g est donné par : $D_g = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.

Or, $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 , car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$.

Par ailleurs, $g(-x) = (-x - 2)^2 + (-x + 2)^2 = [-(x + 2)]^2 + [-(x - 2)]^2 = (x + 2)^2 + (x - 2)^2 = g(x)$.

Donc, la fonction g est paire.

- 3 Si $x \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$, alors $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$. Et donc, $5 \times 0 + 1 \leq 5x + 1 \leq 5 \times \frac{1}{3} + 1$.

Soit, $1 \leq 5x + 1 \leq \frac{8}{3}$. Ce qui implique que $\frac{3}{8} \leq \frac{1}{5x + 1} \leq 1$.

Par conséquent, $\frac{3}{4} \leq \frac{2}{5x + 1} \leq 2$. Autrement dit, $\frac{2}{5x + 1} \in \left[\frac{3}{4}; 2\right]$.

- 4 -1 et 1 sont les deux valeurs interdites, car $x - 1 \neq 0$ et $x + 1 \neq 0$. Sous ces deux conditions,

$$\begin{aligned} \frac{2}{x - 1} = \frac{5}{x + 1} &\Leftrightarrow 2(x + 1) = 5(x - 1) \\ &\Leftrightarrow 2x + 2 = 5x - 5 \\ &\Leftrightarrow 2 + 5 = 5x - 2x \\ &\Leftrightarrow 7 = 3x \\ &\Leftrightarrow x = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, $S = \left\{\frac{7}{3}\right\}$.

- 5 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $2(2x - 1) \geq 5x + 1$.

$$\begin{aligned} 2(2x - 1) \geq 5x + 1 &\Leftrightarrow 4x - 2 \geq 5x + 1 \\ &\Leftrightarrow 4x - 5x \geq 1 + 2 \\ &\Leftrightarrow -x \geq 3 \\ &\Leftrightarrow x \leq -3. \end{aligned}$$

Ainsi, $S =]-\infty; -3]$.

- 6 $I \cap J = [-2; 5] \cap]-\infty; 3] = [-2; 3]$ et $I \cup J = [-2; 5] \cup]-\infty; 3] =]-\infty; 5]$.

- 7 Soient $[AC]$ et $[BD]$ deux diamètres d'un cercle $\mathcal{C}$. Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme, car ses deux diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu O , le centre du cercle $\mathcal{C}$.

Par conséquent, selon la règle du parallélogramme $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Sinon, on peut raisonner autrement : $ABCD$ est un parallélogramme ce qui entraîne que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$.

Et en utilisant la relation de Chasles, on obtient : $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Exercice 2 : (7 points)

On considère la fonction h définie par :

$$h(x) = 2 + \frac{3}{x-2}.$$

1 2 est une valeur interdite, car $x - 2 \neq 0$. Ainsi, l'ensemble de définition de la fonction h est donné par : $D_h = \mathbb{R} - 2 =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

2 Pour tout $x \in D_h$, $h(x) = 2 + \frac{3}{x-2} = \frac{2(x-2)}{x-2} + \frac{3}{x-2} = \frac{2(x-2)+3}{x-2} = \frac{2x-4+3}{x-2} = \frac{2x-1}{x-2}$.

3 0 est l'image de $-\frac{1}{2}$ par la fonction h . En effet, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \times \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} - 2} = \frac{1-1}{\frac{1}{2}-2} = 0$.

4 $\frac{1}{2}$ est l'image de 0 par la fonction h . En effet, $f(0) = \frac{2 \times 0 - 1}{0 - 2} = \frac{1}{2}$.

5 $-1 - \frac{3}{2}\sqrt{2}$ est l'image de $\sqrt{2}$ par la fonction h . En effet,

$$f(\sqrt{2}) = \frac{2 \times \sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 2} = \frac{(2\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 2)}{(\sqrt{2} - 2)(\sqrt{2} + 2)} = \frac{2\sqrt{2}^2 + 4\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2}{\sqrt{2}^2 - 2^2} = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{-2}.$$

6 Déterminer les antécédents de 1 par la fonction h , revient à résoudre l'équation $h(x) = 1$.
Pour tout $x \in D_h$,

$$\begin{aligned} h(x) = 1 &\Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-2} = 1 \\ &\Leftrightarrow 2x-1 = x-2 \\ &\Leftrightarrow 2x-x = -2+1 \\ &\Leftrightarrow x = -1. \end{aligned}$$

Ainsi, -1 est l'antécédent de 1 par la fonction h .

7 Déterminer les antécédents de 2 par la fonction h , revient à résoudre l'équation $h(x) = 2$.
Pour tout $x \in D_h$,

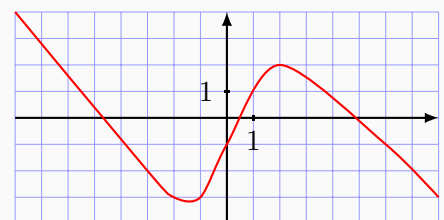
$$\begin{aligned} h(x) = 2 &\Leftrightarrow 2 + \frac{3}{x-2} = 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{x-2} = 0. \end{aligned}$$

C'est absurde ! Ainsi, 2 n'admet pas d'antécédent par la fonction h .

Exercice 3 : (2 points)

Tableau de variation :

x	-8	-1.5	2	8
$f(x)$	4		2	
		-3.2		-3



Exercice 4 : (3 points)

On considère un triangle ABC et les points D et E tels que $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

- 1 En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

- 2 Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et donc les points A, E et C sont alignés.