

Exercice 1 : (7 points)

Les six questions sont indépendantes.

- 1** En appliquant la première identité remarquable, on obtient :

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = (x + \sqrt{3})^2.$$

- 2** En appliquant la première identité remarquable sur le premier terme et la deuxième identité remarquable sur le second terme, on obtient :

$$\begin{aligned} (x + \sqrt{3})^2 - (x - \sqrt{3})^2 &= x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3}^2 - (x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{3}^2) \\ &= x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3}^2 - x^2 + 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}^2 \\ &= 4\sqrt{3}x. \end{aligned}$$

- 3** Si $x \in [-1; 1]$, alors

$$\begin{aligned} -1 \leq x \leq 1 &\Rightarrow -1 \leq -x \leq 1 \\ &\Rightarrow -3 \leq -3x \leq 3 \\ &\Rightarrow -2 \leq -3x + 1 \leq 4 \\ &\Rightarrow -\frac{2}{2} \leq \frac{-3x + 1}{2} \leq \frac{4}{2} \\ &\Rightarrow x \in [-1; 2]. \end{aligned}$$

- 4** -2 et 2 sont les deux valeurs interdites. Sous ces conditions :

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-2} = \frac{-1}{x+2} &\Leftrightarrow 2(x+2) = -1(x-2) \\ &\Leftrightarrow 2x+4 = -x+2 \\ &\Leftrightarrow 2x+x = 2-4 \\ &\Leftrightarrow 3x = -2 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, $S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

- 5** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $3x - 1 \leq 4(x + 1)$.

$$\begin{aligned} 3x - 1 \leq 4(x + 1) &\Leftrightarrow 3x - 1 \leq 4x + 4 \\ &\Leftrightarrow 3x - 4x \leq 4 + 1 \\ &\Leftrightarrow -x \leq 5 \\ &\Leftrightarrow x \geq -5. \end{aligned}$$

Ainsi, $S = [-5; +\infty[$.

- 6** Soit un parallélogramme $ABCD$. Ainsi,

a $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$; b $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}$;		c $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$; d $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.
--	--	--

Exercice 2 : (2 points)

Déterminer les intersections et réunions d'intervalles suivantes :

- a) $\left]-\frac{7}{4}; +\infty\right[\cap \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[= \left]-\frac{7}{4}; \frac{1}{2}\right[;$ b) $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[\cap \left]-10; \frac{7}{2}\right] = \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right];$
- c) $]5; 10] \cup]-33; 6] =]-33; 10];$ d) $[2; 6] \cup [-4; +\infty[= [-4; +\infty[.$

Exercice 3 : (3 points)

- 1** Soient a et b deux réels strictement positifs. En utilisant la troisième identité remarquable, on obtient :

$$\begin{aligned} \left[(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - \sqrt{a+b}\right] \times \left[(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + \sqrt{a+b}\right] &= (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - \sqrt{a+b}^2 \\ &= \sqrt{a}^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2 - (a+b) \\ &= a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b - (a+b) \\ &= 2\sqrt{a}\sqrt{b}. \end{aligned}$$

Or, $2\sqrt{a}\sqrt{b} > 0$, donc $\left[(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - \sqrt{a+b}\right] \times \left[(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + \sqrt{a+b}\right] > 0$.

- 2** On sait que pour tout a et b dans $\mathbb{R}_+^*$, $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + \sqrt{a+b} > 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \left[(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - \sqrt{a+b}\right] \times \left[(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + \sqrt{a+b}\right] &> 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b}) - \sqrt{a+b} &> 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} &> \sqrt{a+b}. \end{aligned}$$

Exercice 4 : (4 points)

Un loueur de matériel propose deux tarifs pour la location d'une machine :

Tarif A : un forfait de 10 euros puis 5,50 euros par heure d'utilisation ;

Tarif B : aucun forfait et 7,10 euros par heure.

On note x le nombre d'heures.

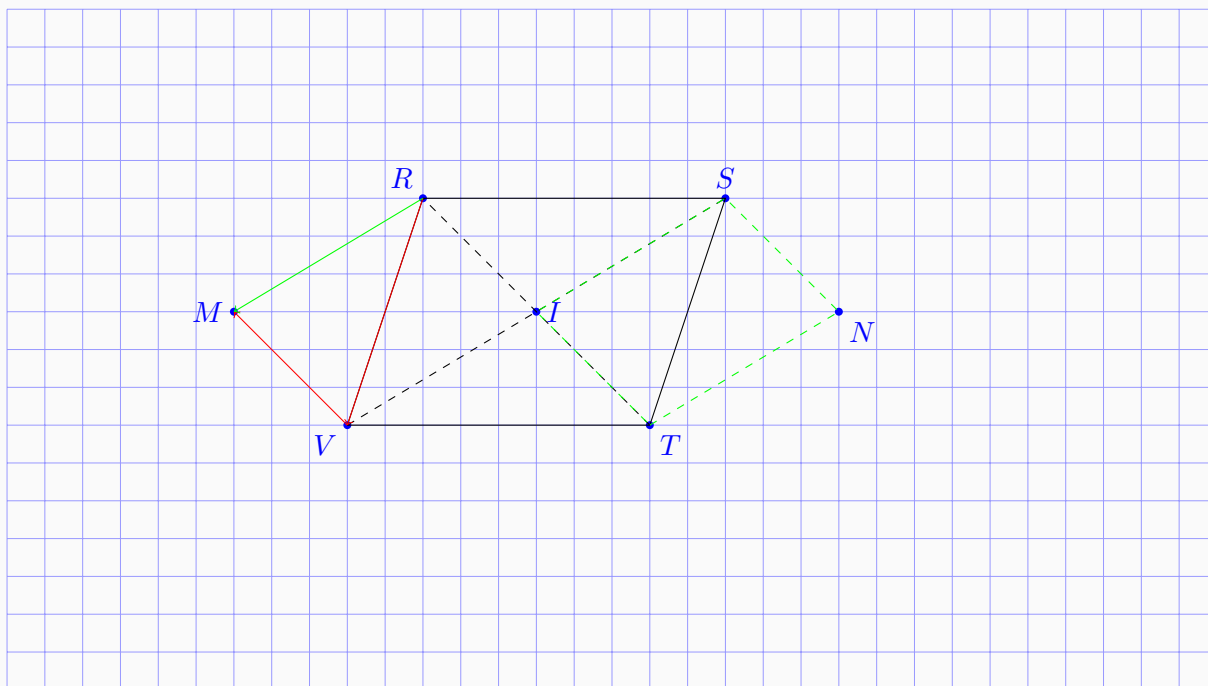
- 1** Le coût du tarif A, est donné par l'expression : $5,5x + 10$.
- 2** Le coût du tarif B, est donné par l'expression : $7,1x$.
- 3** Dire que le tarif A est plus intéressant que le tarif B revient à dire $5,5x + 10 < 7,1x$. Or,

$$\begin{aligned} 5,5x + 10 < 7,1x &\Leftrightarrow 10 < 7,1x - 5,5x \\ &\Leftrightarrow 10 < 1,6x \\ &\Leftrightarrow \frac{10}{1,6} < x \\ &\Leftrightarrow 6,25 < x. \end{aligned}$$

Ainsi, à partir de 7 heures de location, le tarif A se révèle la plus intéressant.

Exercice 5 : (4 points)

On donne un parallélogramme $RSTV$ de centre I .



- 1 Voir la figure pour le point M déterminé par la relation $\overrightarrow{RM} = \overrightarrow{RV} + \overrightarrow{IR}$.
- 2 Voir la figure pour le point N tel que $SITN$ est un parallélogramme.
- 3 En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{RM} &= \overrightarrow{RV} + \overrightarrow{IR} \\
 &= \overrightarrow{RI} + \overrightarrow{IV} + \overrightarrow{IR} \\
 &= \overrightarrow{IV}, \text{ car, } \overrightarrow{RI} + \overrightarrow{IR} = \vec{0}.
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, $SITN$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{NT}$.

- 4 On sait que les deux diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, ainsi I est le milieu de $[VS]$ et de $[RT]$. Dès lors, on peut dire que : $\overrightarrow{IV} = \overrightarrow{SI}$.
Or, $\overrightarrow{IV} = \overrightarrow{RM}$ et $\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{NT}$. Donc, $\overrightarrow{RM} = \overrightarrow{NT}$.
On déduit alors que $RMTN$ est un parallélogramme.