

Exercice 1 : (7 points)

Les six questions sont indépendantes.

- 1 En appliquant la première identité remarquable, on obtient : $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = (x + \sqrt{2})^2$.
- 2 En appliquant la première identité remarquable sur le premier terme et la deuxième identité remarquable sur le second terme, on obtient :

$$\begin{aligned}(x + \sqrt{2})^2 - (x - \sqrt{2})^2 &= x^2 + 2\sqrt{2}x + \sqrt{2}^2 - (x^2 - 2\sqrt{2}x + \sqrt{2}^2) \\ &= x^2 + 2\sqrt{2}x + \sqrt{2}^2 - x^2 + 2\sqrt{2}x - \sqrt{2}^2 \\ &= 4\sqrt{2}x.\end{aligned}$$

- 3 Si $x \in [-1; 1]$, alors

$$\begin{aligned}-1 \leq x \leq 1 &\Rightarrow -1 \leq -x \leq 1 \\ &\Rightarrow -2 \leq -2x \leq 2 \\ &\Rightarrow -1 \leq -2x + 1 \leq 3 \\ &\Rightarrow -\frac{1}{3} \leq \frac{-2x + 1}{3} \leq \frac{3}{3} \\ &\Rightarrow \frac{-2x + 1}{3} \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right].\end{aligned}$$

- 4 -1 et 1 sont les deux valeurs interdites. Sous ces conditions :

$$\begin{aligned}\frac{2}{x-1} = \frac{3}{x+1} &\Leftrightarrow 2(x+1) = 3(x-1) \\ &\Leftrightarrow 2x + 2 = 3x - 3 \\ &\Leftrightarrow 2x - 3x = -3 - 2 \\ &\Leftrightarrow -x = -5 \\ &\Leftrightarrow x = 5.\end{aligned}$$

Ainsi, $S = \{5\}$.

- 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $6x - 1 \leq 2(x + 1)$.

$$\begin{aligned}6x - 1 \leq 2(x + 1) &\Leftrightarrow 6x - 1 \leq 2x + 2 \\ &\Leftrightarrow 6x - 2x \leq 2 + 1 \\ &\Leftrightarrow 4x \leq 3 \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Ainsi, $S = \left]-\infty; \frac{3}{4}\right]$.

- 6 Soit un parallélogramme ABCD. Compléter les égalités suivantes.

a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ b $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$	c $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$ d $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$
---	---

Exercice 2 : (2 points)

Déterminer les intersections et réunions d'intervalles suivantes :

$$g) \left] -\frac{7}{4}; +\infty \right[\cap]-\infty; 1[= \left] -\frac{7}{4}; 1[\quad \quad h) \left[\frac{3}{2}; +\infty \right[\cap]-6; \frac{1}{3}[= \emptyset$$

$$i)]5; 10] \cup [3; 6] = [3; 10]. \quad \quad j) [2; 6] \cup [4; +\infty[= [2; +\infty[.$$

Exercice 3 : (3 points)

- 1 Soient a et b deux réels strictement positifs. En utilisant la troisième identité remarquable, on obtient :

$$\begin{aligned} \left[(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - \sqrt{a+b} \right] \times \left[(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + \sqrt{a+b} \right] &= (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - \sqrt{a+b}^2 \\ &= \sqrt{a}^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2 - (a+b) \\ &= a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b - (a+b) \\ &= 2\sqrt{a}\sqrt{b}. \end{aligned}$$

Or, $2\sqrt{a}\sqrt{b} > 0$, ainsi $\left[(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - \sqrt{a+b} \right] \times \left[(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + \sqrt{a+b} \right] > 0$.

- 2 On sait que pour tout a et b dans $\mathbb{R}_+^*$, $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + \sqrt{a+b} > 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \left[(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - \sqrt{a+b} \right] \times \left[(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + \sqrt{a+b} \right] &> 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b}) - \sqrt{a+b} &> 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b}) &> \sqrt{a+b}. \end{aligned}$$

Exercice 4 : (3 points)

Un parc de loisir propose deux formules d'abonnement.

Formule A : La carte à l'année coûte 55 € et le prix d'une entrée est de 20 €.

Formule B : La carte à l'année coûte 80 € et le prix d'une entrée est de 15 €.

On note y le nombre d'entrées.

- 1 Le coût à l'année avec la formule A est donné par l'expression : $20y + 55$.
- 2 Le coût à l'année avec la formule B est donné par l'expression : $15y + 80$.
- 3 Dire que la formule B est plus avantageuse que la formule A revient à dire $15y + 80 < 20y + 55$. Or,,

$$\begin{aligned} 15y + 80 < 20y + 55 &\Leftrightarrow 80 - 55 < 20y - 15y \\ &\Leftrightarrow 25 < 5y \\ &\Leftrightarrow \frac{25}{5} < y \\ &\Leftrightarrow 5 < y. \end{aligned}$$

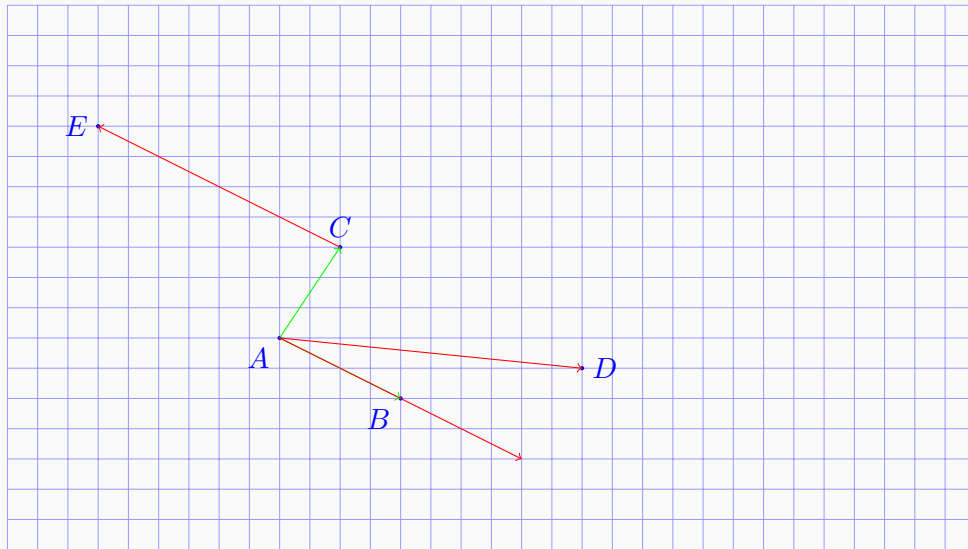
Ainsi, à partir de six entrées dans l'année, la formule B se révèle la plus intéressante.

Exercice 5 : (5 points)

Soit trois points A, B et C non alignés. On note D et E les points définis respectivement par

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{AB}.$$

- 1 Ci-après la figure.



- 2** En utilisant la relation de Chasles, on obtient : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}$.
 Or, $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Ainsi, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$, car $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.
- 3** D'après la questions précédentes, les deux vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc les droites (CD) et (AB) sont parallèles.
- 4** On sait que : $\overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$. Donc, $\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC}$.
 Autrement dit, le point C est le milieu de $[DE]$.
 Par conséquent, le point E est le symétrique du point D par rapport au point C .