Corrigé : Devoir Maison n°7

Exercice 1 : (5 points)

Un artisan fait une étude sur la vente de sa production de vases. Il en fabrique entre 0 et 60 et estime que le coût de production de x vases fabriqués est modélisé par la fonction C donnée par $C(x) = x^2 - 10x + 500$.
On note $R(x)$ la recette, en euros, correspondant à la vente de x vases fabriqués. Un vase est vendu à 50 €.

1. $R(x) = 50x$.
2. $R(50) = 50 \times 50 = 2\ 500$. Ainsi, l'artisan réalise une recette qui s'élève à 2 500 euros.
   $C(50) = 50^2 - 10 \times 50 + 500 = 2\ 500$. Donc, le coût de la production de 50 vases s'élève également s'élève à 2 500 euros.
3. $B(x) = R(x) - C(x) = 50x - (x^2 - 10x + 500) = -x^2 + 60x - 500$.
4. (a) En utilisant la deuxième identité remarquable, on obtient :
   $-(x-30)^2 + 400 = -(x^2 - 60x + 900) + 400 = -x^2 + 60x - 900 + 400 = -x^2 + 60x - 500$.
   (b) Pour tout $x \in [0\ ;\ 60]$, on a : $-(x-30)^2 \leqslant 0$. Ce qui implique que, $B(x) \leqslant 400$.
   De plus, $B(30) = 400$.
   On déduit alors que le bénéfice maximum est de 400 euros, il est atteint lorsque l'artisan vend 30 vases.

Exercice 2 : (5 points)

Dans un plan muni d'un repère, on place les points $A(3; -2)$, $B(-5; 4)$ et $C(-2; -1)$.

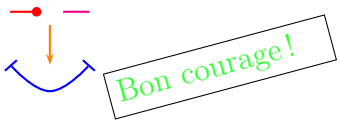
1. — B' milieu de $[AC]$. Ainsi,
   $B'\left(\dfrac{x_A + x_C}{2}\ ;\ \dfrac{y_A + y_C}{2}\right) \Leftrightarrow B'\left(\dfrac{3 + (-2)}{2}\ ;\ \dfrac{-2 + (-1)}{2}\right) \Leftrightarrow B'\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ -\dfrac{3}{2}\right)$.
   — C' milieu de $[AB]$. Ainsi,
   $C'\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A + y_B}{2}\right) \Leftrightarrow C'\left(\dfrac{3 + (-5)}{2}\ ;\ \dfrac{-2 + 4}{2}\right) \Leftrightarrow C'(-1\ ;\ 1)$.
2. D'une part, $\overrightarrow{C'B'}\begin{pmatrix} x'_B - x'_C \\ y'_B - y'_C \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{C'B'}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} - (-1) \\ -\dfrac{3}{2} - 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{C'B'}\begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{5}{2} \end{pmatrix}$.
   D'autre part, $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 - (-5) \\ -1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{5}{2} \end{pmatrix}$.
   Ainsi, $\overrightarrow{C'B'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
3. Soit $(x\ ;\ y)$ les coordonnées de G. Ainsi,
   $\overrightarrow{CG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - (-2) \\ y - (-1) \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 - (-2) \\ 1 - (-1) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} - 2 \\ \frac{4}{3} - 1 \end{pmatrix}$
   $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Exercice 2 : (suite)

4. On a : $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix} x_G - x_C \\ y_G - y_C \end{pmatrix} = \overrightarrow{BG}\begin{pmatrix} -\frac{4}{3}+5 \\ \frac{1}{3}-4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BG}\begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ -\frac{11}{3} \end{pmatrix}$

   et $\overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix} x_{B'} - x_B \\ y_{B'} - y_B \end{pmatrix} = \overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-(-5) \\ -\frac{3}{2}-4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$

   De plus, $\det(\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{BB'}) = \begin{vmatrix} \frac{11}{3} & \frac{11}{2} \\ -\frac{11}{3} & -\frac{11}{2} \end{vmatrix} = \frac{11}{3} \times (-\frac{11}{2}) - (-\frac{11}{3}) \times \frac{11}{2} = 0.$

   Ainsi, les points B, G et B' sont-ils alignés.

   On déduit alors que $k = \frac{\frac{11}{3}}{\frac{11}{2}} = \frac{2}{3}$.