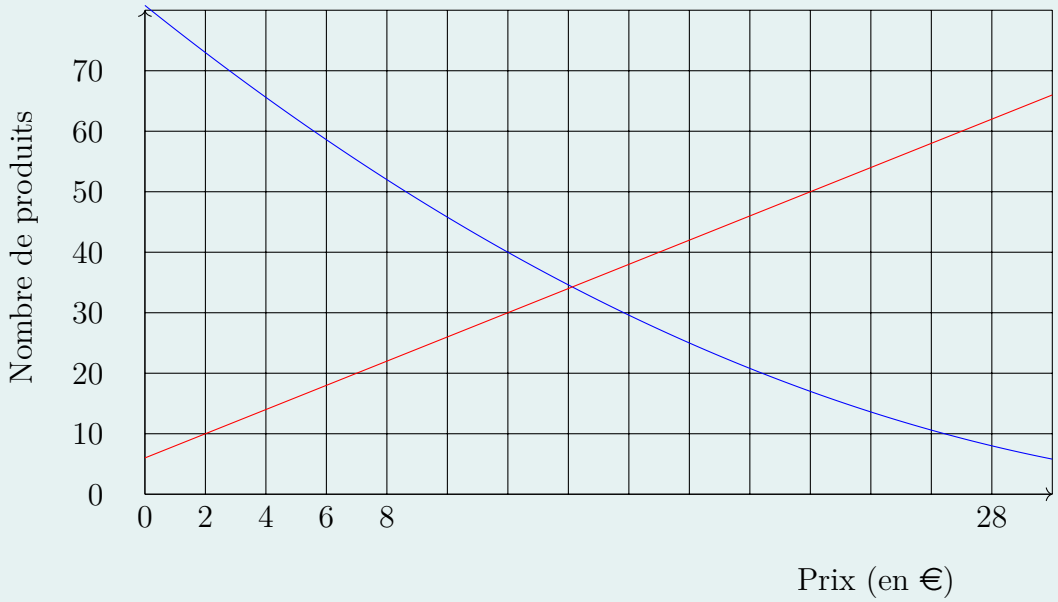
Corrigé : Devoir Maison n°6

Exercice 1 : (5 points)

Une étude de marché s'intéresse à l'évolution de l'offre et de la demande d'un produit en fonction de son prix unitaire, exprimé en euros.
Pour un prix unitaire de x €, compris entre 2 et 30, le nombre de produits demandés est modélisé par : $f(x) = 0,05x^2 - 4x + 80,8$. Le nombre de produits offerts est modélisé par la fonction : $g(x) = 2x + 6$
.



Sur le graphique ci-dessus sont représentées les courbes des fonctions f et g.

1. g est une fonction affine, elle est donc représentée par la droite rouge. La fonction f est par conséquent représentée par la courbe blue.
2. $g(18) = 2 \times 18 + 6 = 36 + 6 = 42$.
   Ainsi, il y a 42 produits offerts sur le marché au prix de 18 €.
   $f(18) = 0,05 \times 18^2 - 4 \times 18 + 80,8 = 25$.
   Ainsi, 25 produits sont demandés lorsque le prix est de 18 €.

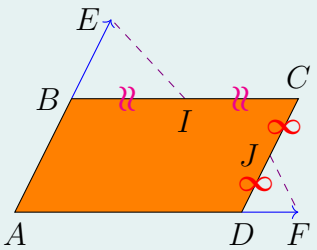
On appelle prix d'équilibre d'un produit, le prix pour lequel l'offre et la demande sont égales.

3. Pour estimer graphiquement le prix d'équilibre, il suffit de déterminer l'abscisse du point d'intersection des deux courbes. Ainsi, Le prix d'équilibre s'élève à environ 14,13 €.
4. $g(14,13) = 2 \times 14,13 + 6 = 34,26$.
   Ainsi, environ 34 produits sont demandés au prix d'équilibre.

Exercice 2 : (5 points)

Soit $ABCD$ un parallélogramme. I est le milieu de $[BC]$ et J celui de $[DC]$. a et b sont deux nombres réels et on considère les points E et F définis par

— $\overrightarrow{BE} = a\overrightarrow{AB}$
— $\overrightarrow{DF} = b\overrightarrow{AD}$



Exercice 2 : (suite)

1. Dans le repère $(A; \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$.

   (a) En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

   $$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{AB} = (1+a)\overrightarrow{AB}.$$

   Ainsi, $(0\ ;\ 1+a)$ sont les coordonnées de E.
   Idem, en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

   $$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AD} + b\overrightarrow{AD} = (1+b)\overrightarrow{AD}.$$

   Ainsi, $(1+b\ ;\ 0)$ sont les coordonnées de F.

   (b) $(0,5\ ;\ 1)$ sont les coordonnées de I, car I est le milieu de $[BC]$.
   $(1\ ;\ 0,5)$ sont les coordonnées de J, car J est le milieu de $[DC]$.
   On peut alors déduire les coordonnées des deux vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{JF}$:
   $\overrightarrow{IE}\binom{x_E-x_I}{y_E-y_I} \Leftrightarrow \overrightarrow{IE}\binom{0-0,5}{1+a-1} \Leftrightarrow \overrightarrow{IE}\binom{-0,5}{a}$ et $\overrightarrow{JF}\binom{x_F-x_J}{y_F-y_J} \Leftrightarrow \overrightarrow{JF}\binom{1+b-1}{0-0,5} \Leftrightarrow \overrightarrow{JF}\binom{b}{-0,5}$.

2. Les droites (EI) et (FJ) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{JF}$ sont colinéaires, autrement dit, si et seulement si
   $\det(\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{JF}) = \begin{vmatrix} -0,5 & b \\ a & -0,5 \end{vmatrix} = (-0,5) \times (-0,5) - a \times b = 0,25 - ab = 0.$
   D'où le résultat.