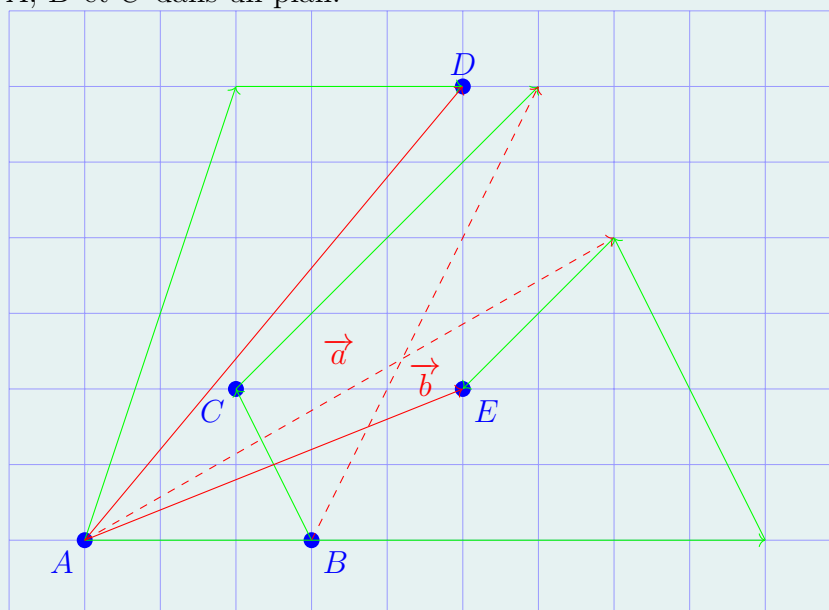


Devoir Maison n°4 : Corrigé

Exercice 1 : (5 points)

Placer trois points A , B et C dans un plan.



1. Voir sur la figure, la représentation, en pointillés rouges, des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ tels que :

$$— \vec{a} = \vec{BC} + 2\vec{AC}$$

$$— \vec{b} = 3\vec{AB} - 2\vec{CB}$$

2. Voir sur la figure le point D tel que $\vec{AD} = \vec{a} + \vec{AB}$.

3. Voir sur la figure le point E tel que $\vec{AE} = \vec{b} - \vec{AC}$.

4. On sait que : $\vec{AD} = \vec{a} + \vec{AB}$ et $\vec{a} = \vec{BC} + 2\vec{AC}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{AD} &= \vec{a} + \vec{AB} \\ &= \vec{BC} + 2\vec{AC} + \vec{AB} \\ &= \vec{AC} + 2\vec{AC}, \quad \text{selon la relation de Chasles} \\ &= 3\vec{AC}. \end{aligned}$$

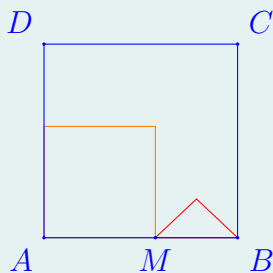
Les deux vecteurs $\vec{AD}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires, donc les points A , C et D sont alignés.

5. On sait que : $\vec{b} = 3\vec{AB} - 2\vec{CB}$ et $\vec{AE} = \vec{b} - \vec{AC}$. Ainsi, en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{CE} &= \vec{CA} + \vec{AE} \\ &= -\vec{AC} + \vec{b} - \vec{AC} \\ &= -2\vec{AC} + 3\vec{AB} - 2\vec{CB} \\ &= -2\vec{AB} + 3\vec{AB}, \quad \text{selon la relation de Chasles} \\ &= 2\vec{AB}. \end{aligned}$$

Par conséquent, le quadrilatère $ABEC$ est un parallélogramme.

Exercice 2 : (5 points)



Le carré $ABCD$, ci-contre a un côté de longueur 8 cm. M est un point pris au hasard sur le segment $[AB]$. On construit, à l'intérieur du carré $ABCD$, le carré de côté $[AM]$ et le triangle rectangle isocèle d'hypoténuse $[MB]$.

On s'intéresse aux aires du petit carré, du triangle et du motif constitué par le carré et le triangle. On pose $x = AM$.

1. L'aire du petit carré en fonction de x : $\mathcal{A}_c = x^2$.
2. En appliquant le théorème de Pythagore sur le triangle rectangle et isocèle d'hypoténuse $[MB]$, on obtient :

$$MB^2 = a^2 + a^2 \quad \text{avec } a \text{ la longueur d'un des deux côtés égaux.}$$

$$MB^2 = 2a^2$$

$$a^2 = \frac{MB^2}{2}$$

$$a^2 = \frac{(8-x)^2}{2}.$$

Or, $\mathcal{A}_t = \frac{a^2}{2}$. Donc, $\mathcal{A}_t = \frac{(8-x)^2}{4} = \frac{(8-x)^2}{2^2} = \left(\frac{8-x}{2}\right)^2 = \left(4 - \frac{x}{2}\right)^2$.

3. L'aire du motif en fonction de x : $\mathcal{A}_m = x^2 + \left(4 - \frac{x}{2}\right)^2$.
4. Si l'aire du motif $\mathcal{A}_m$ est égale 16 cm², alors :

$$x^2 + \left(4 - \frac{x}{2}\right)^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + 4^2 - 2 \times 4 \times \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} = 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 16 - 4x + \frac{x^2}{4} = 16$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{4}x^2 - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \left(\frac{5}{4}x - 4\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \frac{5}{4}x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{16}{5}.$$

Ainsi, l'aire du motif vaut 16 cm², lorsque $x = 0$ ou $x = \frac{16}{5}$.

5. Si l'aire du triangle est égale à l'aire du carré, alors :

$$x^2 = \left(4 - \frac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 - \left(4 - \frac{x}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + 4 - \frac{x}{2}\right) \left(x - 4 + \frac{x}{2}\right) = 0, \text{ car } a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$\Leftrightarrow \left(4 + \frac{x}{2}\right) \left(-4 + \frac{3x}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 + \frac{x}{2} = 0 \text{ ou } -4 + \frac{3x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -8 \text{ ou } x = \frac{8}{3}.$$

x étant une distance, seule la valeur positive nous intéresse. Ainsi, les deux surfaces sont égales lorsque $x = \frac{8}{3}$.