

Exercice 1 :

- 1 Posons $f(x) = \sqrt{x}$. Soit a et b deux réels tels que $0 \leq a < b$.

Comparons $f(a)$ et $f(b)$ en étudiant le signe de leur différence :

$$f(a) - f(b) = \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \times (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \frac{\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

$a - b < 0$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$ donc $f(a) - f(b) < 0$ donc $f(a) < f(b)$.

- 2 .

(a) $3,79 < 3,8$.

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ donc $\sqrt{3,79} < \sqrt{3,8}$.

(b) $4 < \pi + 1$.

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ donc $\sqrt{4} < \sqrt{\pi + 1}$ donc $2 < \sqrt{\pi + 1}$.

- 3 On examine les conditions d'existence : $x - 1 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq 1$.

On résout alors l'équation dans $[1 ; +\infty[$.

$$\sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x-1 = 2^2 \Leftrightarrow x-1 = 4 \Leftrightarrow x = 5$$

Cette solution convient car elle appartient à $[1 ; +\infty[$, donc $S = \{5\}$.

- 4 On examine les conditions d'existence : $x \geq 0$. On résout dans $[0 ; +\infty[$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x} > 10^{-3} &\Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 > (10^{-3})^2 \text{ car la fonction carré est strictement croissante sur } [0 ; +\infty[\\ &\Leftrightarrow x > 10^{-6} \end{aligned}$$

Ainsi, $S =]10^{-6} ; +\infty[$.

Exercice 2 :

- 1 On suppose que $0 \leq x \leq 1$.

On multiplie chaque membre par x : $x^2 \leq x$.

La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $\sqrt{x} \leq \sqrt{1}$ donc $\sqrt{x} \leq 1$.

On multiplie chaque membre par $\sqrt{x}$: $x \leq \sqrt{x}$

- 2 On suppose que $1 \leq x$.

On multiplie chaque membre par x : $x \leq x^2$.

La fonction racine carrée est croissante sur $[0 ; +\infty[$ donc $\sqrt{1} \leq \sqrt{x}$ donc $1 \leq \sqrt{x}$.

On multiplie chaque membre par $\sqrt{x}$: $\sqrt{x} \leq x$.

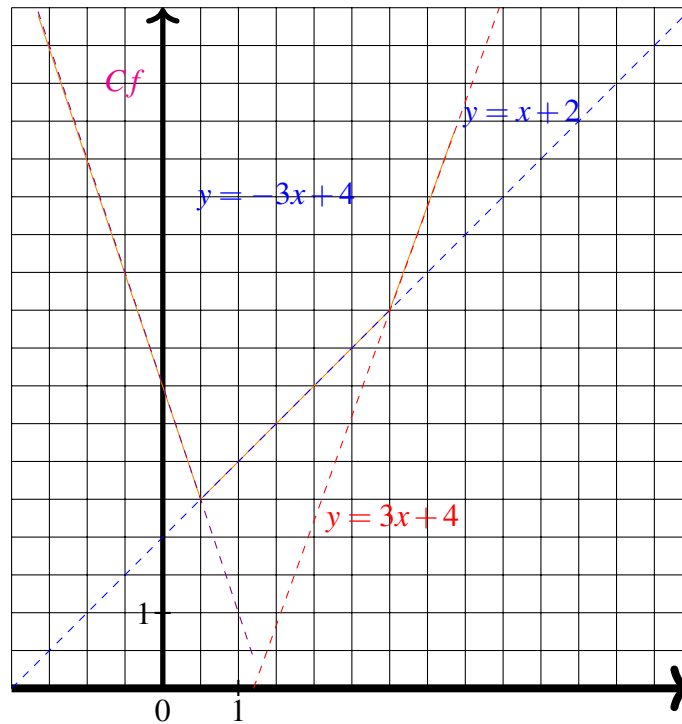
Exercice 3 :

- 1 La fonction $x \mapsto -x$ est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et la fonction $x \mapsto x$ est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

- 2 En utilisant le tableau de signes, on obtient :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$ x - 3 $	$-x + 3$	$-x + 3$	$x - 3$	
$ -2x + 1 $	$-2x + 1$	$2x - 1$	$2x - 1$	
$f(x)$	$-3x + 4$	$x + 2$	$3x - 4$	

3 Voici la représentation graphique de la fonction f .



Exercice 4 :

1 Dans le cas où u est croissante sur I .

Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$. u étant croissante sur I , $u(a) < u(b)$.

De plus, $u(a) \geq 0$ et $u(b) \geq 0$ et la fonction racine carrée est croissante sur $[0 ; +\infty[$ donc $\sqrt{u(a)} \leq \sqrt{u(b)}$.

Ainsi, la fonction $\sqrt{u}$ est croissante sur I .

La démonstration est analogue lorsque u est décroissante sur I .

2 Soit f la fonction telle que : $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$.

(a) $\sqrt{x^2 + 3x - 4}$ existe $\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \geq 0$.

On recherche les racines de $u(x) = x^2 + 3x - 4$.

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25 = 5^2.$$

Le trinôme a deux racines :

$$x_1 = \frac{-3-5}{2} = -4 \text{ et } x_2 = \frac{-3+5}{2} = 1.$$

$u(x)$ est du signe de $a = 1$, soit positif sauf entre les racines.

Donc f est bien définie sur $]-\infty ; -4] \cup [1 ; +\infty[$.

(b) $a > 0$ et $-\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2}$ donc u est décroissante sur $]-\infty ; -\frac{3}{2}]$ et croissante sur $[-\frac{3}{2} ; +\infty[$.

Donc f est décroissante sur $]-\infty ; -4]$ et croissante sur $[1 ; +\infty[$.

3

De plus, u ne s'annule pas sur I et garde le même signe.

On commence par étudier le sens de variation et le signe de la fonction u .

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$u(x)$	$u(x) > 0$	0	$u(x) < 0$
$f(x)$			

Sur $]-\infty ; 5[$ et sur $]5 ; +\infty[$, u et $\frac{1}{u}$ ont des sens de variation contraires.

3

2 En utilisant le sens de variation de la fonction racine carrée, démontrer que $\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$.

3

2 $y > 1$ donc $\sqrt{y} < y < y^2$.

3

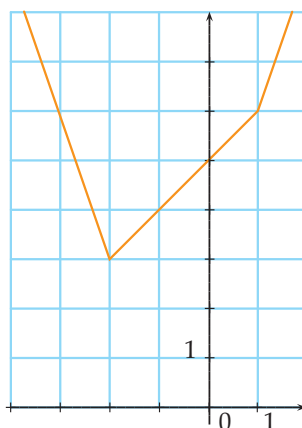
2 Comparer $2a - 1$, $\sqrt{2a - 1}$ et $(2a - 1)^2$.

3

1

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$ x-1 $	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$	
$2 x+2 $	$-2x-4$	$2x+4$	$2x+4$	
$f(x)$	$-3x-3$	$x+5$	$3x+3$	

2



3

Soit f la fonction telle que $f(x) = \sqrt{2x - 18}$.

1

2

3

1

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$u(x)$		0		0	

2

3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x - 2| + |x + 1|$.

1

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$ x-2 $				
$ x+1 $				
$f(x)$				

- 2 Dresser le tableau de variations de la fonction f .
 - 3 Tracer la courbe C_f représentative de f dans un repère.
 - 4 Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = 5$. Vérifier à l'aide du graphique.
 - 5 Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x) < 4$. Vérifier à l'aide du graphique.
-