

Dérivation

1re STMG

maths-mde.fr

- ① Taux de variation
- ② Nombre dérivé et tangente à une courbe
- ③ Fonction dérivée, signe et sens de variation
- ④ Calcul d'une fonction dérivée
- ⑤ Applications aux fonctions polynômes de degré 2 et 3

1. Taux de variation

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I .

Soit h un réel non nul tel que $a + h \in I$. Le taux de variation de f entre a et $a + h$ est le rapport (quotient)

$$t(h) \text{ défini par : } t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

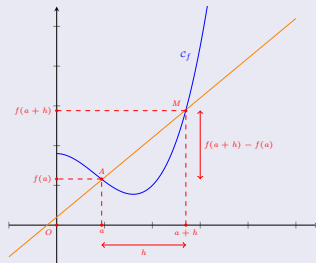
Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Le taux de variation de f entre 1 et 2 est : $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{2^2 - 1^2}{2 - 1} = \frac{3}{1} = 3$.

On considère deux points A et M d'une courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives a et $a + h$.
La droite (AM) est appelée sécante à la courbe $\mathcal{C}_f$.
Graphiquement, le taux de variation de f entre a et $a + h$ est le coefficient directeur de la sécante (AM) :

$$t(h) = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$



2. Nombre dérivé et tangente à une courbe

Définition

On dit que f est dérivable en a lorsque le taux de variation $t(h)$ admet comme limite un nombre réel quand h tend vers 0. Ce nombre, noté $f'(a)$ est appelé **nombre dérivé** de f en a . On a ainsi :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

$\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = l$, se lit la « limite » quand h tend vers 0 de $t(h)$ égale l .

Cela signifie que lorsque le nombre h devient très proche de 0, le nombre $t(h)$ prend des valeurs très voisines de l , autrement dit, aussi proche que l'on veut.

Exemples

- On considère la fonction f définie par : $f(x) = 3x + 1$.

Le nombre dérivé de f en 2 est déterminé par : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$.

$$\text{Or, } \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{3(2+h) + 1 - (3 \times 2 + 1)}{h} = \frac{6 + 3h + 1 - 7}{h} = \frac{3h}{h} = 3. \text{ Ainsi, } f'(2) = 3.$$

- On considère la fonction g définie par : $g(x) = x^2$.

Le nombre dérivé de g en 1 est déterminé par : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h}$.

$$\text{Or, } \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \frac{h(2+h)}{h} = 2 + h.$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2 = g'(1).$$

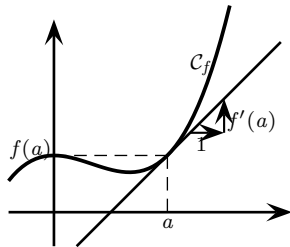
Définition

Soient f une fonction dérivable en a , $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a .

La **tangente à la courbe** $\mathcal{C}_f$ au point A est la droite passant par A de coefficient directeur $f'(a)$.

Son équation réduite est de la forme :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$



Aux alentours du point A , la tangente est la droite la plus proche de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exemples

- On considère la fonction f définie par : $f(x) = 3x + 1$.

L'équation de la tangente de la courbe $\mathcal{C}_f$ en 2 est donnée par : $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$.

Or, $f'(2) = 3$. Ainsi, $y = f'(2)(x - 2) + f(2) = 3(x - 2) + 7 = 3x - 6 + 7 = 3x + 1$.

- On considère la fonction g définie par : $g(x) = x^2$.

L'équation de la tangente de la courbe $\mathcal{C}_g$ en 1 est donnée par : $y = g'(1)(x - 1) + g(1)$.

Or, $g'(1) = 2$. Ainsi, $y = 2(x - 1) + g(1) = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$.

3. Fonction dérivée, signe et sens de variation

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

La fonction qui, à tout réel x de I , associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f .

On la note f' .

Propriétés

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

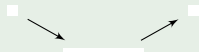
- Si pour tout x de I , on a $f'(x) > 0$, alors f est croissante sur I .
- Si pour tout x de I , on a $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I .
- Si pour tout x de I , on a $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .

Exemple

On considère la fonction g définie par : $g(x) = x^2$.
 g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée en x , $g'(x)$ est égale $2x$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) &= 2x.\end{aligned}$$

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$		$g(0) = 0$	

4. Calcul d'une fonction dérivée

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Dérivée
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

Opérations sur les dérivées

f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

Fonction	Dérivée
$ku, (k \text{ constante})$	ku'
$u + v$	$u' + v'$

5. Applications aux fonctions polynômes de degré 2 et 3

Propriétés

- Les fonctions polynômes de degré 2 définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x) = 2ax + b$.
- Les fonctions polynômes de degré 3 définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Propriété

Lorsque la fonction dérivée s'annule et change de signe, la fonction f admet un extremum local.