Exercice 0 :

1. Pour tout nombre a : $0 \times a = 0$. C'est donc 0.
2. Pour tout nombre a : $1 \times a = a$. C'est donc 1.

Exercice* 1 :

1. Vrai. En effet, soit n un multiple de 8, il existe alors un entier k tel que $n = 8 \times k$. Or, $n = 4 \times 2k$, donc n est un multiple de 4.
2. Faux. En effet, 12 est un multiple de 4 mais pas un multipe de 8.
3. Faux. En effet, 3 est un diviseur de 15 mais pas de 5.
4. Vrai. En effet, 1 et 5 sont les diviseurs de 5. Ils sont également des diviseurs de 15.
5. Faux. En effet, 11 est un diviseur de 55 mais pas un mutiple de 5.

Exercice* 2 :

1. 4 520 et 4525 sont deux multiples de 5.
2. 4 521 ; 4 524 et 4 527 sont des multiples de 3.
3. 4 520 ; 4 522 ; 4 524 ; 4 526 et 4 528 sont des multiples de 3.
4. 4 725 est multiple de 9.
5. 4 020 ; 4 120 ; 4 220 ; 4 320 ; 4 420 ; 4 520 ; 4 620 ; 4 720 ; 4 820 et 4 920 sont des multiples de 10.

Exercice* 3 :

1. 6, 12 et 18 sont trois multiples de 6.
2. Soit n un multiple de 6. Il existe alors un entier k tel que $n = 6 \times k$.
3. On remarque que : $n = 6 \times k = 3 \times 2k = 2 \times 3k$. Donc n est aussi un multiple de 3 et de 2.

Exercice* 4 : On sait que : $36054 = 36 \times 1000 + 54 = 18 \times (2 \times 1000 + 3)$. Donc, 36 054 est un multiple de 18.

Exercice* 5 : 102 ; 119 ; 136 ; 153 ; 170 et 197 sont les multiples de 17 compris entre 100 et 200. 102 ; 136 et 170 sont des nombres pairs et donc divisibles par 2. 153 est divisible par 3, car 1 + 5 + 3 = 9 et 9 est un multiple de 3. 197 est un multiple de 17, car 197= 17 × 11. Par conséquent, le nombre de billes vérifiant les 3 contraintes est égal à 119.

Exercice 6 :** Le code à 9 chiffres du coffre fort de Teddy est le 781254963. En effet :

— 78 est le nombre formé par le 1er et le 2ème chiffre. Et, il est bel et bien un multiple de 2.
— 81 est le nombre formé par le 2ème et le 3ème chiffre. Et, il est bel et bien un multiple de 3.
— 12 est le nombre formé par le 3ème et le 4ème chiffre et il est bel est bien un multiple de 4
— Idem : 25 est multiple de 5 ; 54 est multiple de 6 ; 49 est multiple de 7 ; 96 est multiple de 8 et enfin 63 est un multiple de 9.

Exercice* 7 :** On remarque que : $\overline{abcabc} = \overline{abc} \times 1000 + \overline{abc} = 1001 \times \overline{abc}$. Or, 1001 est un multiple de 7, 11 et 13. Par conséquent, $\overline{abcabc}$ est un multiple de 7, 11 et 13.

Exercice* 8 : Calculons le PGCD de 24 et 36.
Les diviseurs de 24 sont : $\boxed{1}$ $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$, 8, $\boxed{12}$, 24.
Les diviseurs de 36 sont : $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$, 9, $\boxed{12}$, 18, 36.
Donc le PGCD est 12.
Idem avec 80 et 100.

Exercice 9 :** Chaque nombre pair on peut l'écrire sous la forme $2p$ et chaque nombre impair on peut l'écrire sous la forme $2q + 1$, avec p et q deux nombres entiers.

1. La somme de deux nombres pairs est paire. En effet, $2p + 2q = 2(p + q)$.
2. La somme de deux nombres impairs donne un nombre pair. En effet, $2p+1+2q+1 = 2(p+q)+2 = 2(p + q + 1)$.
3. La somme de deux nombres consécutifs est impaire. En effet, $p + (p + 1) = 2p + 1$.
4. Le somme de deux multiples de cinq est un multiple de cinq. En effet, $5p + 5q = 5(p + q)$.
5. Le produit d'un multiple de trois par un multiple de 4 est un multiple de 12. En effet, $3p \times 4q = 12 \times pq$.

Exercice 10 :**

1. $n = 100 \times c + 10 \times d + u$.
2. On sait que : $5|100c$ car $100c = 5 \times 20c$ et $5|10d$ car $10d = 5 \times 2d$, donc $5|100c + 10d$.
3. On sait que : $5|100c + 10d$. Si $u = 0$ ou $u = 5$ alors $5|100c + 10d + u$, soit $5|n$.
   Et, si $5|n$, alors $5|n-(100c+10d)$, soit $5|u$, par conséquent, $u = 0$ ou 5.

Exercice 11 :**

1. $n = 100c + 10d + u = 99c + c + 9d + d + u = 99c + 9d + c + d + u$.
2. (a) On sait que : $3|99c$ car $99c = 3 \times 33c$ et $3|9d$ car $9d = 3 \times 3d$, donc $3|99c + 9d$.
   (b) On sait que : $3|99c + 9d$. Si $3|c + d + u$ alors $3|99c + 9d + c + d + u$, soit $3|n$.
   Et, si $3|n$, alors $3|n-(100c+10d)$, soit $3|c+d+u$.
3. Idem pour 9.

Exercice* 12 :** n désigne un nombre entier à trois chiffres. On peut écrire n sous la forme $100c + 10d + u$, avec c le chiffre des centaines, d le chiffre des dizaines et u le chiffre des unités. On sait que $4|100c$, car $100c = 4 \times 25c$. Par conséquent, pour que $4|n$, il faut que $n|n - 100c$, soit $n|10d + u$.

Exercice* 13 : 91 n'est pas premier car 91 = 7 × 13.

Exercice* 14 : On remarque que : $2 \times 17 = 34$; $3 \times 23 = 69$; $5 \times 19 = 95$ et $13 \times 11 = 143$. Le nombre de la liste restant est donc 7. Or, 29 est le 10ème nombre premier dans l'ordre croissant. Par conséquent, le produit du nombre restant par le dixième nombre premier vaut $7 \times 29 = 203$.

Exercice* 15 : Louis a tort de se monter impatient. Sur de la quatrième ligne, on remarque que le nombre situé sur la deuxième colonne n'est pas premier.

6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23
24	$\boxed{25}$	26	27	28	29
30	31	32	33	34	$\boxed{35}$

Exercice* 16 : Exemple à suivre :

84	2
42	2
21	3
7	7
1	

Donc : $84 = 2^3 \times 3 \times 7$.

Exercice 17 :** Décomposons les aires des faces en facteurs premiers. On obtient :

96	2
48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

Donc : $84 = 2^5 \times 3 = 2^3 \times (2^2 \times 3)$.

160	2
80	2
40	2
20	2
10	2
5	5
1	

Donc : $160 = 2^5 \times 5 = 2^3 \times (2^2 \times 5)$.

240	2
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

Donc : $160 = 2^4 \times 3 \times 5 = (2^2 \times 3) \times (2^2 \times 5)$.

À la lumière des trois décompositions, on peut déduire les 3 dimensions du pavé droit ($L = 2^3$; $l = 3 \times 2^2$ et $h = 5 \times 2^2$). Par conséquent, le volume de la boîte est égal à : $V = L \times l \times h = 3 \times 5 \times 2^4 \times 2^3 = 15 \times 2^7 = 1920$ cm^3.

Exercice* 18 : Les nombres premiers permutables à deux chiffres sont : 13; 17; 37; 77; 79; 31; 71; 73 et 97. Voir le crible d'Eratosthène dans le livre numérique.

Exercice* 19 : Posons l'opération de la division euclidienne. Nous obtenons :

164	53
159	3
5	

Cédric doit donc attendre 4 bus avant de pouvoir monter. Soit une durée de $4 \times 17 = 68$ minutes.

Exercice* 20 : Posons l'opération de la division euclidienne suivante :

109	8
29	13
4	

Louis va empiler les 8 perles de trois couleurs, selon la disposition indiquée dans la consigne, à 13 reprises et il va lui rester 4. La 109e perle est donc blanche.

Exercice* 21 : On dit que deux nombres sont premiers entre eux s'ils n'ont que 1 comme diviseur commun.

1. Les diviseurs de 45 sont : $\boxed{1}$;3;5;9;15 et 45.
2. Les diviseurs de 28 sont : $\boxed{1}$;2;;4;7;14 et 28.
3. Le PGCD(45;28) =1 donc 45 et 28 sont premiers.
4. Tous les nombres pairs sont divisibles par 2, ils ne peuvent donc être premiers entre eux.
5. 3 et 5 sont deux nombres impairs et premiers entre eux.

Exercice 22 :** La décomposition du nombre de filles en produit de facteurs premiers, nous donne :

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

Donc : $72 = 2^3 \times 3^2 = 2^2 \times \boxed{2 \times 3^2} = 4 \times \boxed{18}$.

La décomposition du nombre de garçons en produit de facteurs premiers, nous donne :

108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

Donc : $108 = 2^2 \times 3^3 = 2 \times 3 \times \boxed{2 \times 3^2} = 6 \times \boxed{18}$. On constate donc que : le professeur d'EPS peut constituer 18 équipes de 4 filles et 6 garçons, soit 10 joueurs.

Exercice 23 :** Un jardinier veut planter, le long des bords d'une plate-bande rectangulaire, un certain nombre de rosiers également espacés. Il souhaite que la distance d'un rosier au suivant soit un nombre entier de

centimètres entre 100 et 200. De plus, il prévoit de planter à chaque coin de la plate-bande. Cette plate-bande a pour dimensions 14,84 m sur 10,60 m.

1. La décomposition de 1 484 est donnée par :

1 484	2
742	2
371	7
53	53
1	

Donc : $1484 = 2^2 \times 7 \times 53$.

La décomposition de 1 060 en produit de facteurs premiers, est donnée par :

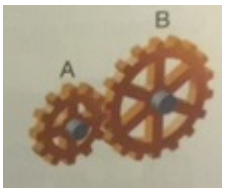
1 060	2
530	2
265	5
53	53
1	

Donc : $1060 = 2^2 \times 5 \times 53$.

2. On remarque que :
$1484 = 2^2 \times 7 \times 53 = 2 \times 7 \times \boxed{2 \times 53} = 14 \times \boxed{106}$.
$1060 = 2^2 \times 5 \times 53 = 2 \times 5 \times \boxed{2 \times 53} = 10 \times \boxed{106}$.
Le jardinier pourra donc planter 14 rosiers en longueur et 10 rosiers en Largeur espacés de 106 cm. Soit 1140 rosiers au total.

Exercice* 24 :** Lorsque les roues sont à nouveau dans la même position, elles ont fait un certain nombre entier de tours, donc :

— A a tourné d'un nombre de dents qui est un multiple de 12.
— B a tourné d'un nombre de dents qui est un multiple de 18.



Quelques multiples de 12 : 12 ; 24 ; $\boxed{36}$; 48 ; 60 ; ...
Quelques multiples de 18 : 18 ; $\boxed{36}$; 54 ; 72 ; ...
On remarque donc que 36 est le plus petit commun multiple. Par ailleurs ; $36 = 3 \times 12$ et $36 = 2 \times 18$, on déduit donc, A a fait 3 tours et B a fait 2 tours.

Exercice* 25 :** La transformation des 15 premiers chiffre, selon la consigne, nous donne : 8540 6353 8320 150.

La somme des 15 nouveaux chiffre vaut donc 53. Le reste de la division euclidienne de 53 par 10 est égal à 3. La clé de Luhn correspond alors à : 10 - 3 = 7. Par conséquent, la carte ci-contre n'est pas valide.