1

Série d'exercices

Corrigés — Classe : Maths Expertes — Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

Donner la partie réelle, la partie imaginaire et le conjugué des nombres complexes suivants :

$$z_1 = -2i + 5 \qquad z_2 = 15 \qquad z_3 = 3i$$
$$z_4 = i(2+3i).$$

Exercice n°2

Soit z un nombre complexe non nul, de forme algébrique $z = x + iy$. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = \frac{\overline{z}}{z}$ **b)** $z_2 = \frac{iz}{\overline{z}}$.

Exercice n°3

Effectuez les opérations suivantes en mettant le résultat sous la forme $a + ib$, a et b étant deux réels :

a) $(7+2\mathrm{i}) + (9-4\mathrm{i})$;
d) $(-2+4\mathrm{i})(\mathrm{i}-5)$;
b) $(2\mathrm{i}-3) - (8+4\mathrm{i})$;
e) $(4-3\mathrm{i})^2$;
c) $(2+3\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$;
f) $(1+\mathrm{i})^3$.

Exercice n°4

Mettre sous la forme algébrique les nombres complexes suivants :

a) $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$;
c) $\dfrac{2+\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}$;
e) $\dfrac{5+3\mathrm{i}}{2\mathrm{i}-1}$;
b) $\dfrac{1}{3+5\mathrm{i}}$;
d) $\dfrac{\mathrm{i}-1}{3+2\mathrm{i}}$;
f) $\dfrac{3\mathrm{i}-4}{4\mathrm{i}-3}$.

Exercice n°5

Soit z un nombre complexe non nul.
Montrer que $\overline{\mathrm{i}z} + \dfrac{z + 2\Re(z) - \overline{z}}{\mathrm{i}z} = -\mathrm{i}\overline{z} - 2\mathrm{i}$.

Exercice n°6

Donner la forme algébrique des nombres suivants.

a) $(2-\mathrm{i})^5$;
c) $(1+2\mathrm{i})^4$;
b) $(2+\mathrm{i})^5$;
d) $(1+2\mathrm{i})^8$.

Exercice n°7

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

a) $(1+\mathrm{i})z = 2$.
d) $-3z^2 + 5z - 6 = 0$.
b) $(3-5\mathrm{i})z = 3 + 5\mathrm{i}$.
e) $2z^2 - 3z + \dfrac{17}{4} = 0$.
c) $z^2 + 3z + \frac{25}{4} = 0$.
f) $100z^2 + 20z + 37 = 0$.

Exercice n°8

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $z + 2i = iz - 1$
2. $(3+2i)(z-1) = i$
3. $(2-i)z + 1 = (3+2i)z - i$
4. $(4-2i)z^2 = (1+5i)z$.

Exercice n°9

Soit f l'application complexe qui à tout nombre complexe z associe le nombre iz : $f(z) = \mathrm{i}z$.
En posant $z = a + ib$, donner la forme algébrique de $f(z)$ en fonction de a et b.

Exercice n°10

Donner la forme algébrique de la somme :

$$S = \sum_{k=0}^{100} \mathrm{i}^k = 1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \cdots + \mathrm{i}^{100}.$$

Exercice n°11

Donner la forme algébrique du produit :

$$\frac{1-\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} \times \frac{1+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}.$$

Exercice n°12

On considère l'équation suivante :

$$z^3 - 3z + 4\mathrm{i} = 0. \qquad \text{(E)}$$

1. Montrer que i est une solution de (E).
2. Trouver les nombres complexes b et c tels que :
$$z^3 - 3z + 4\mathrm{i} = (z-\mathrm{i})(z^2 + bz + c).$$
3. Donner les solutions de (E) sous la forme algébrique.

Exercice n°13

On cherche à déterminer $\sqrt{\mathrm{i}}$.
Pour cela, on considère le nombre $z = a + bi$ tel que $z^2 = \mathrm{i}$.
Trouver les valeurs possibles de a et b.

Exercice n°14

Déterminer la forme algébrique de $\sqrt{-7+24\mathrm{i}}$.

Exercice n°15

Résoudre les systèmes suivants, d'inconnues les nombres complexes z_1 et z_2 :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2z_1 - z_2 & = & i \\ -2z_1 + 3iz_2 & = & -17 \end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{rcl} 3iz_1 + iz_2 & = & i + 7 \\ iz_1 + 2z_2 & = & 11i \end{array}\right. .$$