Corrigés

Série d'exercices Classe : Maths Expertes Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

$\Re e(z_1) = 5$, $\Im m(z_1) = -2$, $\overline{z_1} = 5 + 2i$.
$\Re e(z_2) = 15$, $\Im m(z_2) = 0$, $\overline{z_2} = 15$.
$\Re e(z_3) = 0$, $\Im m(z_3) = 3$, $\overline{z_3} = -3i$.
En développant on obtient : $z_4 = 2i - 3$. Ainsi, $\Re e(z_4) = -3$, $\Im m(z_4) = 2$, $\overline{z_4} = -3 - 2i$.

Exercice n°2

a) On remplace z par $x + iy$ et $\overline{z}$ par $x - iy$, puis on effectue les claculs. On obtient alors :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{x - iy}{x + iy} \\ &= \frac{(x - iy)(x - iy)}{(x + iy)(x - iy)} \\ &= \frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - 2\frac{xy}{x^2 + y^2}i. \end{aligned}$$

b) On a :

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{i(x + iy)}{x - iy} \\ &= \frac{-y + ix}{x - iy} \\ &= \frac{(-y + ix)(x + iy)}{(x - iy)(x + iy)} \\ &= \frac{-2xy + i(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{-2xy}{x^2 + y^2} + i\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Exercice n°3

a) $\begin{aligned}[t] (7 + 2\mathrm{i}) + (9 - 4\mathrm{i}) &= 7 + 9 + 2\mathrm{i} - 4\mathrm{i} \\ &= \underline{16 - 2\mathrm{i}}. \end{aligned}$

b) $\begin{aligned}[t] (2\mathrm{i} - 3) - (8 + 4\mathrm{i}) &= -3 - 8 + 2\mathrm{i} - 4\mathrm{i} \\ &= \underline{-11 - 2\mathrm{i}}. \end{aligned}$

c) $\begin{aligned}[t] (2 + 3\mathrm{i})(1 + \mathrm{i}) &= 2 \times 1 + 3\mathrm{i}^2 + 2 \times \mathrm{i} + 3\mathrm{i} \times 1 \\ &= 2 - 3 + 5\mathrm{i} \\ &= \underline{-1 + 5\mathrm{i}}. \end{aligned}$

d) $\begin{aligned}[t] (-2 + 4\mathrm{i})(\mathrm{i} - 5) &= -2 \times (-5) + 4\mathrm{i}^2 - 2\mathrm{i} + 4\mathrm{i} \times (-5) \\ &= 10 - 4 - 2\mathrm{i} - 20\mathrm{i} \\ &= \underline{6 - 22\mathrm{i}}. \end{aligned}$

e) $\begin{aligned}[t] (4 - 3\mathrm{i})^2 &= 4^2 + (3\mathrm{i})^2 - 2 \times 4 \times 3\mathrm{i} \\ &= 16 - 9 - 24\mathrm{i} \\ &= \underline{7 - 24\mathrm{i}}. \end{aligned}$

f) $\begin{aligned}[t] (1 + \mathrm{i})^3 &= (1 + \mathrm{i})^2(1 + \mathrm{i}) \\ &= (1 + \mathrm{i}^2 + 2\mathrm{i})(1 + \mathrm{i}) \\ &= 2\mathrm{i}(1 + \mathrm{i}) \\ &= 2\mathrm{i} + 2\mathrm{i}^2 \\ &= \underline{-2 + 2\mathrm{i}}. \end{aligned}$

Exercice n°4

a) $\dfrac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} = \dfrac{(1 + \mathrm{i})(1 + \mathrm{i})}{(1 - \mathrm{i})(1 + \mathrm{i})} = \dfrac{2\mathrm{i}}{2} = \boxed{\mathrm{i}}.$

b) $\begin{aligned}[t] \frac{1}{3 + 5\mathrm{i}} &= \frac{1(3 - 5\mathrm{i})}{(3 + 5\mathrm{i})(3 - 5\mathrm{i})} \\ &= \frac{3 - 5\mathrm{i}}{3^2 + 5^2} \\ &= \boxed{\frac{3}{34} - \frac{5}{34}\mathrm{i}}. \end{aligned}$

c) $\begin{aligned}[t] \frac{2 + \mathrm{i}}{3 - 4\mathrm{i}} &= \frac{(2 + \mathrm{i})(3 + 4\mathrm{i})}{(3 - 4\mathrm{i})(3 + 4\mathrm{i})} \\ &= \frac{2 + 11\mathrm{i}}{3^2 + 4^2} \\ &= \boxed{\frac{2}{25} + \frac{11}{25}\mathrm{i}}. \end{aligned}$

d) $\begin{aligned}[t] \frac{\mathrm{i} - 1}{3 + 2\mathrm{i}} &= \frac{(-1 + \mathrm{i})(3 - 2\mathrm{i})}{(3 + 2\mathrm{i})(3 - 2\mathrm{i})} \\ &= \frac{-1 + 5\mathrm{i}}{3^2 + 2^2} \\ &= \boxed{-\frac{1}{13} + \frac{5}{13}\mathrm{i}}. \end{aligned}$

e) $\begin{aligned}[t] \frac{5 + 3\mathrm{i}}{2\mathrm{i} - 1} &= \frac{(5 + 3\mathrm{i})(-1 - 2\mathrm{i})}{(-1 + 2\mathrm{i})(-1 - 2\mathrm{i})} \\ &= \frac{1 - 13\mathrm{i}}{(-1)^2 + 2^2} \\ &= \boxed{\frac{1}{5} - \frac{13}{5}\mathrm{i}}. \end{aligned}$

f) $\begin{aligned}[t] \frac{3\mathrm{i} - 4}{4\mathrm{i} - 3} &= \frac{(-4 + 3\mathrm{i})(-3 - 4\mathrm{i})}{(-3 + 4\mathrm{i})(-3 - 4\mathrm{i})} \\ &= \frac{24 + 7\mathrm{i}}{(-3)^2 + 4^2} \\ &= \boxed{\frac{24}{25} + \frac{7}{25}\mathrm{i}}. \end{aligned}$

Exercice n°5

Soit z un nombre complexe non nul.

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{i}z} + \frac{z + 2\Re(z) - \overline{z}}{\mathrm{i}z} &= \overline{\mathrm{i}z} + \frac{2}{z} \times \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}} + \frac{2\Re(z)}{\mathrm{i}z} \\ &= \overline{\mathrm{i}z} + \frac{2}{z} \times \Im(z) + \frac{2\Re(z)}{\mathrm{i}z} \times \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}} \\ &= \overline{\mathrm{i}z} + \frac{2\Im(z)}{z} - \frac{2\mathrm{i}\Re(z)}{z} \\ &= \overline{\mathrm{i}z} + \frac{2\mathrm{i}}{z}\left(-\Re(z) + \frac{\Im(z)}{\mathrm{i}}\right) \\ &= \overline{\mathrm{i}z} + \frac{2\mathrm{i}}{z}\left(-\Re(z) + \frac{\mathrm{i}\Im(z)}{\mathrm{i}^2}\right) \\ &= \overline{\mathrm{i}z} + \frac{2\mathrm{i}}{z}\left(-\Re(z) - \mathrm{i}\Im(z)\right) \\ &= \overline{\mathrm{i}z} - \frac{2\mathrm{i}}{z}\left(\Re(z) + \mathrm{i}\Im(z)\right) \\ &= \overline{\mathrm{i}z} - \frac{2\mathrm{i}}{z} \times z \\ &= -\mathrm{i}\overline{z} - 2\mathrm{i}. \qquad (\text{car } \overline{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}) \end{aligned}$$

Exercice n°6

1. $$(2-\mathrm{i})^5 = \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}2^k\times(-\mathrm{i})^{5-k}$$
$$= \binom{5}{0}2^0(-\mathrm{i})^5+\binom{5}{1}2^1(-\mathrm{i})^4+\binom{5}{2}2^2(-\mathrm{i})^3$$
$$+\binom{5}{3}2^3(-\mathrm{i})^2+\binom{5}{4}2^4(-\mathrm{i})^1+\binom{5}{5}2^5(-\mathrm{i})^0$$
$$= -\mathrm{i}+10+40\mathrm{i}-80-80\mathrm{i}+32$$
$$(2-\mathrm{i})^5 = -38-41\mathrm{i}.$$

2. $$(2+\mathrm{i})^5 = \overline{(2-\mathrm{i})}^5$$
$$= \overline{(2-\mathrm{i})^5}$$
$$= \overline{-38-41\mathrm{i}} \quad \text{d'après la question 1}$$
$$(2+\mathrm{i})^5 = -38+41\mathrm{i}.$$

3. $$(1+2\mathrm{i})^4 = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}1^k\times(2\mathrm{i})^{4-k}$$
$$= \binom{4}{0}1^0\times(2\mathrm{i})^4+\binom{4}{1}1^1\times(2\mathrm{i})^3$$
$$+\binom{4}{2}1^2\times(2\mathrm{i})^2+\binom{4}{3}1^3\times(2\mathrm{i})^1$$
$$+\binom{4}{4}1^4\times(2\mathrm{i})^0$$
$$= 16-32\mathrm{i}-24+8\mathrm{i}+1$$
$$(1+2\mathrm{i})^4 = -7-24\mathrm{i}.$$

4. $$(1+2\mathrm{i})^8 = \left[(1+2\mathrm{i})^4\right]^2$$
$$= (-7-24\mathrm{i})^2 \quad \text{d'après la question 3}$$
$$= 49+2\times7\times24\mathrm{i}+(24\mathrm{i})^2$$
$$(1+2\mathrm{i})^8 = -527+336\mathrm{i}.$$

Exercice n°7

a) $$(1+\mathrm{i})z=2 \iff z=\frac{2}{1+\mathrm{i}}$$
$$\iff z=\frac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}$$
$$\iff z=\frac{2-2\mathrm{i}}{1^2+1^2}$$
$$\iff \boxed{z=1-\mathrm{i}}.$$

b) $$(3-5\mathrm{i})z=3+5\mathrm{i} \iff z=\frac{3+5\mathrm{i}}{3-5\mathrm{i}}$$
$$\iff z=\frac{(3+5\mathrm{i})^2}{3^2+5^2}$$
$$\iff z=\frac{9-25+30\mathrm{i}}{34}$$
$$\iff \boxed{z=-\frac{8}{17}+\frac{15}{14}\mathrm{i}}.$$

c) $z^2+3z+\frac{25}{4}$ a pour discriminant :

$$\Delta = 3^2-4\times1\times\frac{25}{4} = 9-25=-16<0$$

donc les solutions de l'équation $z^2+3z+\frac{25}{4}=0$ sont :

$$z_1=\frac{-3-\mathrm{i}\sqrt{16}}{2}=\boxed{-\frac{3}{2}-2\mathrm{i}} \quad \text{et} \quad z_2=\overline{z_1}=\boxed{-\frac{3}{2}+2\mathrm{i}}.$$

d) $-3z^2+5z-6=0$. Le discriminant de $-3z^2+5z-6$ est :

$$\Delta = 5^5-4\times(-3)\times(-6)=25-72=-47<0$$

donc l'équation admet deux racines complexes :

$$z_1=\frac{-5-\mathrm{i}\sqrt{47}}{-6} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-5+\mathrm{i}\sqrt{47}}{-6}$$

soit,

$$\boxed{z_1=\frac{5+\mathrm{i}\sqrt{47}}{6} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{5-\mathrm{i}\sqrt{47}}{6}}.$$

e) $2z^2-3z+\frac{17}{4}=0$. Le discriminant de $2z^2-3z+\frac{17}{4}$ est :

$$\Delta=(-3)^2-4\times2\times\frac{17}{4}=9-34=-25<0$$

donc l'équation admet deux racines complexes :

$$z_1=\frac{3-\mathrm{i}\sqrt{25}}{4} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{3+\mathrm{i}\sqrt{25}}{4}$$

soit,

$$\boxed{z_1=\frac{3-5\mathrm{i}}{4} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{3+5\mathrm{i}}{4}}.$$

f) $100z^2+20z+37=0$. Le discriminant de $100z^2+20z+37$ est :

$\Delta=(20)^2-4\times100\times37=400-400\times37=-400\times36=-120^2<0$

donc l'équation admet deux racines complexes :

$$z_1=\frac{-20-120\mathrm{i}}{200} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-20+120\mathrm{i}}{200}$$

soit,

$$\boxed{z_1=\frac{-1-6\mathrm{i}}{10} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-1+6\mathrm{i}}{10}}.$$

Exercice n°8

1. $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$ est la solution de cette équation. En effet,

$$z(1-i)=-1-2i \iff z=\frac{-1-2i}{1-i}=\frac{(-1-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i.$$

2. $\frac{15}{13}+\frac{3}{13}i$ est la solution de cette équation. En effet,

$$z-1=\frac{i}{3+2i}=\frac{i(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i.$$

On en déduit que

$$z=\frac{15}{13}+\frac{3}{13}i.$$

3. $\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$ est la solution de cette équation. En effet,

$$(2-i-3-2i)z=-i-1$$
$$\iff (-1-3i)z=-i-1$$
$$\iff z=\frac{-i-1}{-1-3i}=\frac{(-i-1)(-1+3i)}{(-1-3i)(-1+3i)}=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i.$$

4. On distingue deux cas. D'abord, $z=0$ est solution de l'équation. Si $z\neq0$, alors on peut simplifier par z et l'équation est équivalente à

$$(4-2i)z=1+5i$$
$$\iff z=\frac{1+5i}{4-2i}=\frac{(1+5i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)}=\frac{-6+22i}{20}=\frac{-3}{10}+\frac{11}{10}i.$$

L'équation admet donc deux solutions, $z=0$ et $z=\frac{-3}{10}+\frac{11}{10}i$.

Exercice n°9

Posons $z = a + ib$. Alors,

$$\begin{aligned} f(z) &= i(a+ib) \\ &= ai + i^2 b \\ f(z) &= -b + ia. \end{aligned}$$

Exercice n°10

En effet, en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = iu_n$, on obtient une suite géométrique de raison i :

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \cdots + u_{100} = S &= \frac{1 - i^{100+1}}{1-i} \\ &= \frac{1-i^{101}}{1-i} \\ &= \frac{1 - i^{25\times 4+1}}{1-i} \\ &= \frac{1 - \left(i^4\right)^{25} \times i}{1-i} \\ &= \frac{1 - 1^{25} \times i}{1-i} \quad \text{car } i^4 = 1 \\ &= \frac{1-i}{1-i} \\ S &= 1. \end{aligned}$$

Exercice n°11

$$\begin{aligned} \frac{(1-i)(1+i)}{(1-2i)(1+2i)} &= \frac{1^2 - i^2}{1^2 - (2i)^2} \\ &= \frac{1+1}{1+4} \\ \frac{(1-i)(1+i)}{(1-2i)(1+2i)} &= \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Exercice n°12

On considère l'équation suivante :

$$z^3 - 3z + 4i = 0. \qquad \text{(E)}$$

1. On calcule :

$$i^3 - 3i + 4i = -i - 3i + 4i = 0.$$

<u>i est donc bien une solution de (E).</u>

1. Développons :

$$\begin{aligned} (z-i)(z^2+bz+c) &= z^3 + bz^2 + cz - iz^2 - biz + ci \\ &= z^3 + (b-i)z^2 + (c-bi)z - ci. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & z^3 - 3z + 4i = (z-i)(z^2+bz+c) \\ \iff\ & z^3 - 3z + 4i = z^3 + (b-i)z^2 + (c-bi)z - ci \\ \iff\ & \begin{cases} b - i &= 0 \\ c - bi &= -3 \\ -ci &= 4i \end{cases} \\ \iff\ & \begin{cases} b = i \\ c = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où :

$$(E) \iff (z-i)(z^2 + iz - 4) = 0.$$

2. Le discriminant de $z^2 + iz - 4$ est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (i)^2 - 4 \times (-4) = -1 + 16 = 15.$$

Donc ses racines sont :

$$z_1 = \frac{-i + \sqrt{15}}{2} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-i - \sqrt{15}}{2}.$$

Les solutions de (E) (sous la forme algébrique) sont donc :

$$\boxed{i \quad ; \quad -\frac{\sqrt{15}}{2} - \frac{1}{2}i \quad ; \quad \frac{\sqrt{15}}{2} - \frac{1}{2}i}.$$

Exercice n°13

$$\begin{aligned} (a+ib)^2 = i \iff\ & a^2 - b^2 + 2abi = i \\ \iff\ & \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases} \\ \iff\ & \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ b = \dfrac{1}{2a} \end{cases} \\ \iff\ & \begin{cases} a^2 - \left(\frac{1}{2a}\right)^2 = 0 \\ b = \dfrac{1}{2a} \end{cases} \\ \iff\ & \begin{cases} 2a^4 - 1 = 0 \\ b = \dfrac{1}{2a} \end{cases} \\ \iff\ & \begin{cases} a^4 = \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad a^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ b = \dfrac{1}{2a} \end{cases} \end{aligned}$$

Simplifions l'écriture de a en considérant que $\sqrt{2} = 2^{1/2}$, et donc que $\sqrt{\sqrt{2}} = \left(2^{1/2}\right)^{1/2} = 2^{1/4}$.

Ainsi, $a = \pm\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{2^{1/4}}{2^{1/2}} = \pm 2^{-1/2} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Alors, $b = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

On obtient finalement :

$$\boxed{\sqrt{i} = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}.$$

Exercice n°14

Nous allons nous inspirer de ce qui a été fait dans l'exercice permettant d'obtenir $\sqrt{i}$.
Cherchons les réels a et b tels que $(a+ib)^2 = -7+24i$.

$$\begin{aligned}
(a+ib)^2 = -7+24\mathrm{i} &\iff a^2-b^2+2ab\mathrm{i} = -7+24\mathrm{i}\\
&\iff \begin{cases} a^2-b^2 = -7 \\ 2ab = 24 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} a^2-b^2 = -7 \\ b = \frac{12}{a} \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} a^2-\left(\frac{12}{a}\right)^2 = -7 \\ b = \frac{12}{a} \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} a^4-144 = -7a^2 \\ b = \frac{12}{a} \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} a^4+7a^2-144 = 0 \\ b = \frac{12}{a} \end{cases}
\end{aligned}$$

Considérons l'équation :

$$a^4+7a^2-144 = 0 \qquad \text{(E)}$$

En posant $A = a^2$,

$$(E) \iff A^2+7A-144 = 0.$$

Le discriminant de cette dernière équation est :

$$\Delta = 7^2 - 4\times(-144) = 625 = 25^2$$

donc :

$$A = \frac{-7\pm 25}{2} \qquad \text{soit} \qquad A = -16 \text{ ou } A = 9.$$

Or, $A = a^2 \geqslant 0$ donc seule $A = 9$ est possible, soit $a = \pm 3$. Ainsi, $b = \pm\dfrac{12}{3} = \pm 4$.
Finalement,

$$\boxed{\sqrt{-7+24\mathrm{i}} = \pm(3+4\mathrm{i})}.$$

Exercice n°15

On a :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} 2z_1 - z_2 = i \\ -2z_1+3iz_2 = -17 \end{cases}\\
\iff &\begin{cases} 2z_1 - z_2 = i \\ (3i-1)z_2 = -17+i \text{ (L1)+(L2)} \end{cases}\\
\iff &\begin{cases} 2z_1 = i+z_2 \\ z_2 = \frac{-17+i}{3i-1}. \end{cases}
\end{aligned}$$

On met z_2 sous forme algébrique en multipliant numérateur et dénominateur par $-3i-1$ et on trouve $z_2 = 2+5i$. Finalement, revenant à z_1, on trouve que $z_1 = 1+3i$. Le système admet une unique solution donnée par $z_1 = 1+3i$ et $z_2 = 2+5i$.

$$\begin{cases} 3iz_1+iz_2 = i+7 \\ iz_1+2z_2 = 11i \end{cases} \iff \begin{cases} 3iz_1+iz_2 = i+7 \\ 3iz_1+6z_2 = 33i \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} (i-6)z_2 = 7-32i \\ iz_1+2z_2 = 11i. \end{cases}$$

On a donc $z_2 = \frac{7-32i}{i-6} = -2+5i$ après mise sous forme algébrique. On en déduit facilement que $z_1 = 1-4i$. Ce second système admet donc une unique solution donnée par $z_1 = 1-4i$ et $z_2 = -2+5i$.