Puissances

maths-mde.fr

4e

Table des matières

Activité

Activité : Écrire en chiffres

Une année lumière : environ neuf mille milliard de kilomètres.

. . . .

Masse du soleil : deux milliards de milliards de tonnes.

. . . .

Un micron : un millionième de mètre.

. . . .

Un nanomètre : un milliardième de mètre.

. . . .

Rayon de l'atome d'hydrogène : cinq dix milliardièmes de centimètres.

. . . .

Solution

Remarques

Ces écritures ne sont pas faciles à utiliser :

- ⋆ On peut oublier des zéros ou en rajouter.
- ⋆ Ils ne rentrent pas dans la calculatrice.
- ⋆ Ils sont difficiles à lire.
- ⋆ Et si il faut faire des opérations cela ne sera pas facile.

Il existe une écriture qui va nous permettre d'écrire plus simplement ces nombres.

a. Exposant positif

Définition

Soit n un entier strictement positif.
Pour écrire $\underbrace{10 \times 10 \times 10 \times \cdots \times 10}_{n \text{ facteurs}}$, on note « 10^n ».
On lit « 10 exposant n » ou « 10 puissance n ».
L'exposant indique le nombre de zéros après le 1.

Exemples

$10^2 = 10 \times 10 = 100$;
$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$;
$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$;
$10^7 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000\,000$.

b. Exposant négatif

Définition

Soit n un entier strictement positif.

Pour écrire $0,\underbrace{0\cdots\cdots\cdots\cdots 1}_{n \text{ chiffres}}$, on note « 10^{-n} ».

On lit « 10 exposant $-n$ » ou « 10 puissance $-n$ ».

L'exposant négatif indique le nombre de chiffres après la virgule.

Exemples

$10^{-1} = 0{,}1$;

$10^{-3} = 0{,}001$;

$10^{-5} = 0{,}000\,01$;

$10^{-7} = 0{,}000\,000\,1$.

Remarque :

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1\ 000}=\frac{1}{10^3}\\ \frac{1}{1\ 000}=0{,}001=10^{-3}\end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \frac{1}{10^3}=10^{-3}.$$

Propriété

Quel que soit le nombre entier n,

$$\frac{1}{10^n}=10^{-n}.$$

Exemples

$$\frac{1}{10^5}=10^{-5} \qquad \frac{1}{10^{-7}}=10^7.$$

c. Écriture scientifique

Écriture de nombres avec la notation 10^n :
$14\,000\,000\,000 = 14 \times 1\,000\,000\,000 = 14 \times 10^9$;
$0{,}000\,013 = 13 \times 0{,}000\,001 = 13 \times 10^{-6}$.

Définition

Écrire un nombre en notation scientifique, c'est l'écrire sous la forme :

$$a \times 10^n$$

avec, $1 \leq a < 10$.

Exemples

$138\,000\,000 = 1{,}38 \times 10^8$;
$0{,}001\,7 = 1{,}7 \times 0{,}001 = 1{,}7 \times 10^{-3}$;
$0{,}428 = 4{,}28 \times 0{,}1 = 4{,}28 \times 10^{-1}$.

d. Application (EPI)

Donner l'écriture scientifique des distances entre le soleil et les planètes du système solaire (voir livre numérique) :

Planète	Distance moyenne du soleil (millions de km)	Écriture scientifique
Jupiter	778,3	
Vénus	108,2	
Saturne	1 427	
Mars	227,9	
Mercure	57,9	
Neptune	4 497,07	
Uranus	2 877,38	
Terre	149,6	

a. Produit de deux puissances de 10

$$10^3 \times 10^2 = \underbrace{10 \times 10 \times 10}_{\text{3 facteurs}} \times \underbrace{10 \times 10}_{\text{2 facteurs}} = 10^5.$$

$$10^4 \times 10^3 = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10}_{\text{4 facteurs}} \times \underbrace{10 \times 10 \times 10}_{\text{3 facteurs}} = 10^7.$$

$$10^{-2} \times 10^5 = 0{,}01 \times 100\,000 = 1\,000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3.$$

Règle 1 :

Quels que soient les nombres entiers m et n,

$$10^m \times 10^n = 10^{m+n}$$

Exemples

$10^{11} \times 10^{-8} = 10^{11+(-8)} = 10^3.$

$10^{-4} \times 10^{-2} = 10^{-4+(-2)} = 10^{-6}.$

b. Quotient de deux puissances de 10

$$\frac{10^5}{10^2} = \frac{10 \times 10 \times 10 \times \cancel{1}0 \times \cancel{1}0}{\cancel{1}0 \times \cancel{1}0} = 10 \times 10 \times 10 = 10^3.$$

$$\frac{10^2}{10^4} = \frac{\cancel{1}0 \times \cancel{1}0}{\cancel{1}0 \times \cancel{1}0 \times 10 \times 10} = \frac{1}{10 \times 10} = \frac{1}{100} = 0{,}01 = 10^{-2}.$$

Règle 2 :

Quels que soient les entiers relatifs m et n,

$$\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$$

Exemples

$$\frac{10^5}{10^{-2}} = 10^{5-(-2)} = 10^{5+2} = 10^7 \text{ et } \frac{10^3}{10^3} = 10^{3-3} = 10^0 = 1.$$

Remarques : $10^0 = 1$ et $10^1 = 10$.

c. Puissance d'une puissance de 10

Exemples

$(10^2)^3 = 10^2 \times 10^2 \times 10^2 = 10^6$.
$(10^{-3})^2 = 10^{-3} \times 10^{-3} = 10^{-6}$.

Règle 3 :

Soient m et n deux entiers relatifs, on a

$$(10^m)^n = 10^{m \times n}$$

Attention : Il n'y a pas de règle générale pour additionner ou soustraire les puissances de 10. Il faut revenir aux écritures décimales.
$10^3 + 10^2 = 1\,000 + 100 = 1\,100$ et $1\,100$ n'est pas une puissance de 10.

Exemples

Exemples

$$\begin{aligned} 2{,}5 \times 10^4 \times 5{,}3 \times 10^5 &= 12{,}5 \times 5{,}3 \times 10^4 \times 10^5 \\ &= 13{,}25 \times 10^9 \\ &= 1{,}325 \times 10 \times 10^9 \\ &= 1{,}325 \times 10^{10}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2{,}5 \times 10^3 \times 2{,}7 \times 10^5}{4{,}5 \times 10^{-2}} &= \frac{2{,}5 \times 2{,}7}{4{,}5} \times \frac{10^3 \times 10^5}{10^{-2}} \\ &= 1{,}5 \times \frac{10^8}{10^{-2}} \\ &= 1{,}5 \times 10^{10}. \end{aligned}$$

d. Application (EPI)

Compléter la colonne de la *masse volumique* ρ. La formule est donnée par : $\rho = \frac{m}{V}$ avec m la masse et V le volume.

Planète	m (en kg)	V (en m^3)	$\rho = \frac{m}{V}$ (en $kg.m^{-3}$)
Jupiter	$1{,}899 \times 10^{27}$	$1{,}525 \times 10^{24}$	
Vénus	$4{,}870 \times 10^{24}$	$9{,}285 \times 10^{20}$	
Saturne	$5{,}686 \times 10^{26}$	$9{,}048 \times 10^{23}$	
Mars	$6{,}420 \times 10^{23}$	$1{,}642 \times 10^{20}$	
Mercure	$3{,}310 \times 10^{23}$	$6{,}077 \times 10^{19}$	
Neptune	$1{,}024 \times 10^{26}$	$6{,}358 \times 10^{22}$	
Uranus	$8{,}689 \times 10^{25}$	$6{,}995 \times 10^{22}$	
Terre	$5{,}976 \times 10^{24}$	$1{,}084 \times 10^{21}$	

III. Puissance d'un nombre relatif

Définition

Soit n un nombre entier strictement positif.

Pour écrire $\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$, on note « a^n ».

On lit «a puissance n » ou « a exposant n ».

Cas particuliers : $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.

Exemples

$3^2 = 3 \times 3 = 9$;

$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$;

$(-4)^2 = (-4) \times (-4) = 16$.

III. Puissance d'un nombre relatif

Propriétés

Soient a et b deux nombres relatifs et m et n deux entiers relatifs, on a :

- ⋆ $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- ⋆ $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- ⋆ $(a^n)^m = a^{a \times m}$
- ⋆ $a^n \times b^n = (ab)^n$
- ⋆ $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

Exemples

$\frac{5^7}{5^3} = 5^{7-3} = 5^4$; $\frac{x^5}{x^{-2}} = x^{5-(-2)} = x^7$; $\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{5^2}{4^2} = \frac{25}{16}$.