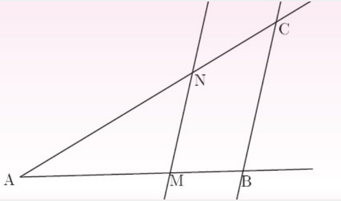
Propriétés de Thalès

maths-mde.fr

3e

Table des matières

a. Configuration classique



Propriété de Thalès

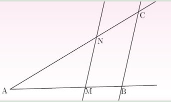
Le point M est sur le segment [AB] et le point N est sur le segment [AC].
Les droites (MN) et (BC) sont parallèles. On a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

a. Configuration classique

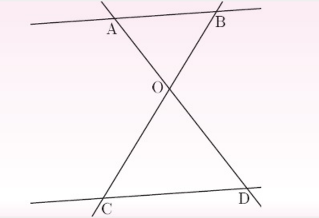
Exemple

- On connaît $\mathrm{AM} = 5\,\mathrm{cm}$; $\mathrm{AN} = 6\,\mathrm{cm}$; $\mathrm{AB} = 8\,\mathrm{cm}$.
- On veut calculer AC.



Les droites (MN)et (BC) sont parallèles et les points A, M et B ainsi que les points A, N et C sont alignés donc, d'après la propriété de Thalès, $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}$.
On remplace par les valeurs que l'on connaît : $\frac{5}{8} = \frac{6}{\mathrm{AC}}$.
On en déduit que $\mathrm{AC} = \dfrac{8 \times 6}{5} = 9{,}6\,\mathrm{cm}$.

b. Configuration «en nœud de papillon»



Propriété de Thalès

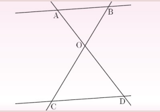
Les droites (AD) et (BC) se coupent en un point O et les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
Les triangles AOB et COD ne se contiennent pas l'un dans l'autre.
On a :

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC} = \frac{AB}{CD}.$$

b. Configuration «en nœud de papillon»

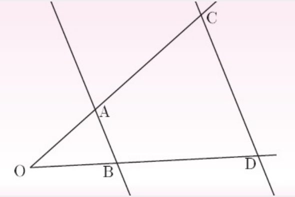
Démonstration

Soient A' et B' les images de A et de B dans la symétrie de centre O. D'après la définition de la symétrie, $\mathrm{OA} = \mathrm{OA}'$ et $\mathrm{OB} = \mathrm{OB}'$. La symétrie centrale conserve les longueurs donc $\mathrm{AB} = \mathrm{A}'\mathrm{B}'$.



Dans une symétrie centrale, une droite et son image sont parallèles donc $(\mathrm{AB})//(\mathrm{A}'\mathrm{B}')$. Or $(\mathrm{AB})//(\mathrm{CD})$ donc $(\mathrm{A}'\mathrm{B}')//(\mathrm{CD})$. Nous nous trouvons donc dans une configuration de Thalès classique et $\frac{\mathrm{OA}'}{\mathrm{OD}} = \frac{\mathrm{OB}'}{\mathrm{OC}} = \frac{\mathrm{A}'B'}{\mathrm{CD}}$ d'où $\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OD}} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OC}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}}$.

c. La "réciproque" de la propriété de Thalès



Propriété

Les points O, A, C ainsi que les points O, B, D étant alignés dans le même ordre,
si $\dfrac{OB}{OD} = \dfrac{OA}{OC}$ alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Méthodes : Deux cas peuvent se présenter.

Ils sont égaux :

- On calcule séparément les rapports ;
- Je remarque que

$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

De plus, les points ..., ..., ... et les points ..., ..., ... sont alignés dans le même ordre donc d'après la réciproque de la propriété de Thalès, les droites ... et ... sont parallèles.

Ils sont inégaux :

- On suppose que les droites sont parallèles... ;
- Comme les points ..., ..., ... et les points ..., ..., ... sont alignés, d'après la propriété de Thalès, on aurait $\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$.
- Les calculs mènent à une égalité fausse (produits en croix) ;
- C'est absurde donc les droites ne sont pas parallèles.

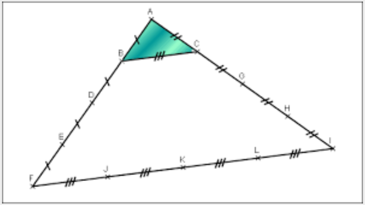
II. Agrandissement & Réduction

Propriété

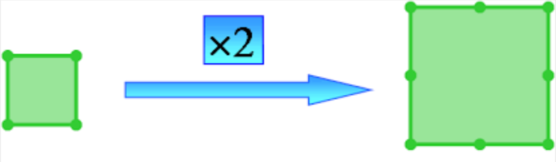
Lors d'une réduction ou d'un agrandissement, les longueurs d'une figure sont multipliées par un facteur k.
Si $k < 1$, c'est une réduction et si $k > 1$, c'est un agrandissement.

Exemple

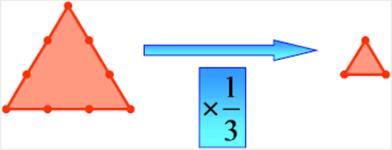
$\frac{AC}{AI} = \frac{1}{4}$ est le coefficient de réduction.
$\frac{AI}{AC} = \frac{4}{1} = 4$ est le coefficient d'agrandissement.
On dit que le triangle ACB est une réduction du triangle AIF.



D'autres exemples



2 est le coefficient d'agrandissement.

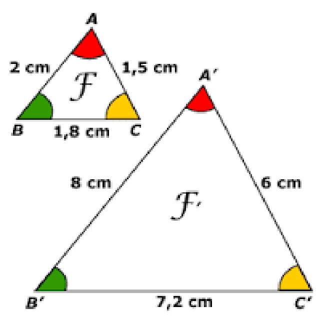


$\frac{1}{3}$ est le coefficient de réduction.

III. Triangles semblables

Définition

Deux triangles sont **semblables** lorsque leurs angles sont deux à deux de même mesure.



Quelques propriétés

Propriétés

- Si deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables, alors les longueurs des côtés opposés aux angles égaux sont proportionnelles :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k.$$

- Si les longueurs des côtés de deux triangles sont proportionnelles, alors ces triangles sont semblables.

Définition

Deux triangles sont **égaux** lorsque leurs côtés sont deux à deux de même longueur.

Remarques : Si deux triangles sont égaux, alors ils sont semblables. L'inverse n'est pas vrai.