Théorèmes de Pythagore

maths-mde.fr

4e

Table des matières

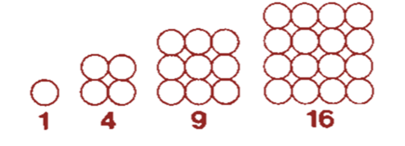
a. Carré parfait

Définition

Un carré parfait est un nombre qui est le carré d'un nombre entier.

Exemples

$1 = 1 \times 1 = 1^2$;
$4 = 2 \times 2 = 2^2$;
$9 = 3 \times 3 = 3^2$;
$16 = 4 \times 4 = 4^2$.
$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$



Les premiers carrés parfaits

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

b. Racine carrée

Définition

Soit a un nombre positif. On appelle racine carrée de a (notée $\sqrt{a}$) le nombre positif dont le carré vaut a.

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

Exemples

$3 \times 3 = 9$ donc : $\sqrt{9} = 3$.
$4 \times 4 = 16$ donc : $\sqrt{16} = 4$.
$1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25$ donc : $\sqrt{2{,}25} = 1{,}5$.

Remarque

Un nombre négatif n'a pas de racine carrée.

II. Théorème de Pythagore

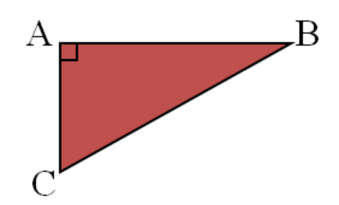
Théorème

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit.

Autre formulation :

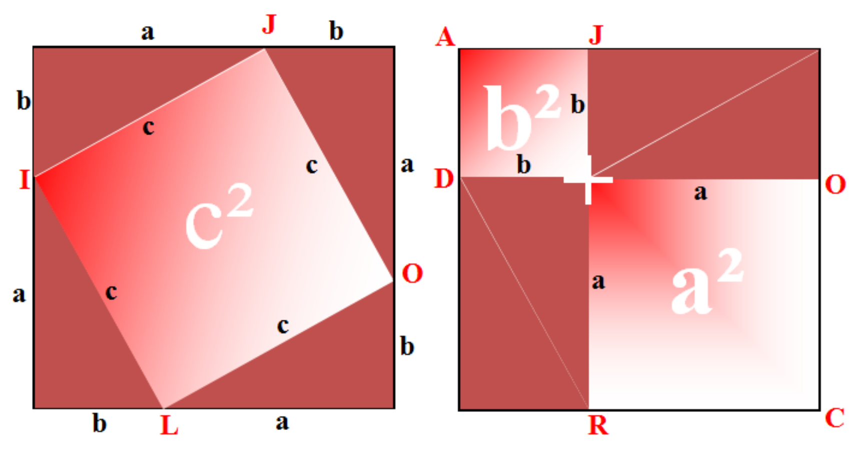
Si ABC est un triangle rectangle en A alors

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$$



Démonstration

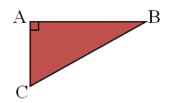
L'aire de JOLI est égale à la somme des aires de OCRE et de JADE.



Exemples

Exemple 1 :

ABC est un triangle rectangle en A tel que $\mathrm{AB} = 5$ et $\mathrm{AC} = 12$. Calculer BC.



Le triangle étant rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore,

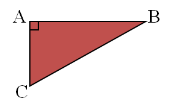
$$\begin{aligned} \mathrm{BC}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 \\ \mathrm{BC}^2 &= 5^2 + 12^2 \\ \mathrm{BC}^2 &= 25 + 144 \\ \mathrm{BC}^2 &= 169 \end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{BC} = 13$ (car $13 \times 13 = 169$).

Exemples

Exemple 2 :

ABC est un triangle rectangle en A tel que $BC = 5$ et $AB = 3$.
Calculer AC.



Le triangle étant rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ 5^2 &= 3^2 + AC^2 \\ 25 &= 9 + AC^2 \\ AC^2 &= 25 - 9 \\ AC^2 &= 16 \end{aligned}$$

Donc, $AC = 4$ (car $4 \times 4 = 16$).

Remarque

Remarque

Parfois, il n'est pas possible de trouver directement le nombre qui, multiplié par lui-même donne le résultat voulu.
Par exemple, pour $\mathrm{BC}^2 = 10$, on ne peut pas trouver BC directement. Dans ce cas, on note $\sqrt{10}$ le nombre qui, multiplié par lui-même donne 10 (et on lit : « racine carrée de 10 »). La solution se notera donc : $\mathrm{BC} = \sqrt{10}$.
Si l'on demande une valeur approchée, la touche $\boxed{\sqrt{\ }}$ de la calculatrice permettra de la calculer. On notera alors $\mathrm{BC} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$.

III. La "réciproque" du théorème de Pythagore

Théorème

Si les côtés d'un triangle ABC vérifient la relation :

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$$

alors le triangle ABC est rectangle en A.

Exemple

Soit ABC un triangle tel que $\mathrm{AC} = 10$, $\mathrm{AB} = 6$ et $\mathrm{BC} = 8$.
$\mathrm{AC}^2 = 10^2 = 100$ et $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$.
On a l'égalité : $\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2$.
Donc d'après le théorème de Pythagore (la réciproque) le triangle ABC est rectangle en B.