DEVOIR COMMUN N°2

Mars 2026

Mathématiques-Spécialité

Lycée Évariste Galois

Durée de l'épreuve 4 h 00

L'usage de la calculatrice, en mode examen actif ou sans mémoire « type collège », est autorisé.

Exercice 1

5 points/20

Un patient doit prendre toutes les heures une dose de 2 ml d'un médicament.

On introduit la suite (u_n) telle que le terme u_n représente la quantité de médicament, exprimée en ml présente dans l'organisme immédiatement après n prises de médicament.

On a $u_1 = 2$ et pour tout entier naturel n strictement positif : $u_{n+1} = 2 + 0,8u_n$.

Partie A : En utilisant ce modèle, un médecin cherche à savoir à partir de combien de prises du médicament la quantité présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL.

1. Calculer la valeur u_2.
2. Montrer par récurrence que : $u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1}$ pour tout entier naturel n strictement positif.
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et et donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Soit N un entier naturel strictement positif, l'inéquation $u_N \geqslant 10$ admet-elle des solutions ?

   Interpréter le résultat de cette question dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer à partir de combien de prises de médicament la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL. Justifier votre démarche.

Partie B : En utilisant la même modélisation, le médecin s'intéresse à la quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du malade au cours du temps.

On définit pour cela la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n strictement positif par : $S_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$.

On admet que la suite (S_n) est croissante.

1. Calculer S_2.
2. Montrer que pour tout entier naturel n strictement positif, $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 10n - 40 + 40 \times 0{,}8^n$.
3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.
4. On donne la fonction mystere suivante, écrite en langage Python :

```python
def mystere(k) :
    n = 1
    s = 2
    while s < k :
          n = n + 1
          s = 10 - 40/n + (40*0.8**n)/n
     return n
```

   Dans le contexte de l'énoncé, que représente la valeur renvoyée par la saisie `mystere(9)` ?
5. Justifier que cette valeur est strictement supérieure à 10.

Exercice 2

5 points/20

En France il y a deux formules pour obtenir le permis de conduire :

— Suivre à partir de 15 ans une formation de conduite accompagnée pendant 2 ans ;
— Suivre la formation classique (sans conduite accompagnée) à partir de 17 ans.

En France actuellement, parmi les jeunes qui suivent une formation au permis de conduire, 16 % choisissent la formation de conduite accompagnée, et parmi eux, 74,7 % réussissent l'examen de conduite dès leur première tentative.

En suivant la formation classique, le taux de réussite dès la première tentative est seulement de 56,8 %.

On choisit au hasard un jeune français qui a déjà passé l'examen de conduite et on considère les évènements A et R suivants :

— A : « le jeune a suivi la formation de conduite accompagnée » ;
— R : « le jeune a eu le permis dès sa première tentative ».

On arrondira les résultats à 10^{-3} près, si nécessaire.

Partie A

1. Dresser un arbre de probabilités modélisant cette situation.
2. (a) Démontrer que $P(R) = 0{,}596\,64$.

   Dans la suite, on gardera la valeur 0,597 arrondie à 10^{-3} près.

   (b) Donner ce résultat en pourcentage et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.
3. On choisit un jeune ayant eu son permis dès sa première tentative. Quelle est la probabilité qu'il ait suivi la formation de conduite accompagnée ?
4. Quelle devrait être la proportion de jeunes suivant la formation de conduite accompagnée si on voulait que le taux de réussite global (quelle que soit la formation choisie) dès la première tentative à l'examen de conduite dépasse 70 % ?

Partie B

Une auto-école présente pour la première fois à l'examen de conduite 10 candidats qui ont suivi la formation de conduite accompagnée. On modélise le fait de passer les examens de conduite par des épreuves aléatoires indépendantes.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces 10 candidats qui auront leur permis dès la première tentative.

1. Justifier que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}747$.
2. Calculer $P(X \geqslant 6)$. Interpréter ce résultat.
3. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.
4. Il y a aussi 40 candidats qui n'ont pas suivi la formation de conduite accompagnée et qui se présentent pour la première fois à l'examen de conduite. De la même manière, on note Y la variable aléatoire qui donne le nombre de ces candidats qui auront le permis à la première tentative. On admet que Y est indépendante de la variable X et qu'en fait $E(Y) = 22{,}72$ et $V(Y) = 9{,}815\,04$.

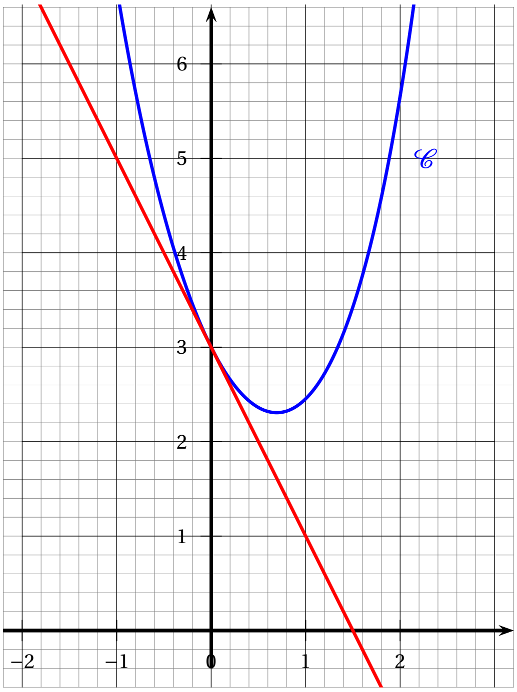
   On note alors Z la variable aléatoire comptant le nombre total de candidats (parmi les 50) qui auront le permis de conduire dès la première tentative dans cette auto-école.

   (a) Exprimer Z en fonction de X et Y.

   (b) En déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.

Exercice 3 5 points/20

Partie A : Détermination d'une fonction f et résolution d'une équation différentielle



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x + ax + be^{-x}.$$

où a et b sont des nombres réels que l'on propose de déterminer dans cette partie.

Dans le plan muni d'un repère d'origine O, on a représenté ci-contre la courbe $\mathscr{C}$, représentant la fonction f, et la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

1 Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

2 En utilisant l'expression de la fonction f, exprimer $f(0)$ en fonction de b et en déduire la valeur de b.

3 On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

(a) Donner, pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$.

(b) Exprimer $f'(0)$ en fonction de a.

(c) En utilisant les questions précédentes, déterminer a, puis en déduire l'expression de $f(x)$.

4 On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y' + y = 2e^x - x - 1.$$

(a) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x - x + 2e^{-x}.$$

est solution de l'équation (E).

(b) Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 0$.

(c) En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

Partie B : Étude de la fonction g sur $[1\ ;\ +\infty[$

1 Vérifier que pour tout réel x, on a :

$$e^{2x} - e^x - 2 = \left(e^x - 2\right)\left(e^x + 1\right)$$

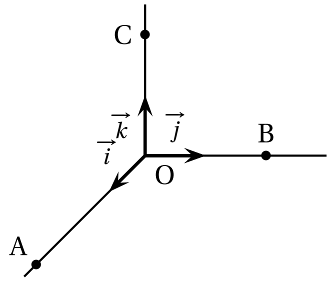
2 En déduire une expression factorisée de $g'(x)$, pour tout réel x.

3 Étudier le sens de variation de la fonction g sur $[1\ ;\ +\infty[$.

Exercice 4 5 points/20

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère les trois points A(3; 0; 0), B(0; 2; 0) et C(0; 0; 2).



L'objectif de cet exercice est de démontrer la propriété suivante :

> Le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces du tétraèdre OABC.

Partie 1 : Distance du point O au plan (ABC)

1. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2 ; 3 ; 3)$ est normal au plan (ABC).
2. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x+3y+3z-6=0$.
3. Donner une représentation paramétrique de la droite d passant par O et de vecteur directeur $\vec{n}$.
4. On note H le point d'intersection de la droite d et du plan (ABC).

   Déterminer les coordonnées du point H.
5. En déduire que la distance du point O au plan (ABC) est égale à $\dfrac{3\sqrt{22}}{11}$.

Partie 2 : Démonstration de la propriété

1. Démontrer que le volume du tétraèdre OABC est égal à 2.
2. En déduire que l'aire du triangle ABC est égale à $\sqrt{22}$.
3. Démontrer que pour le tétraèdre OABC, « le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces du tétraèdre ».

   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \dfrac{1}{3}B \times h$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est la hauteur relative à cette base.